ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GAUSS ORESME SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

Aybüke ERTAŞ

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fatih YILMAZ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

HAZİRAN 2024


ankara
HBM

GAUSS ORESME SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

AYBÜKE ERTAŞ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM
VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM
ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2024

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etikve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Aybüke ERTAŞ

07.06.2024

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Aybüke ERTAŞ tarafından hazırlanan Gauss Oresme Sayıları ve Özellikleri Başlıklı tez çalışması 07/06/2024 tarih ve 14:00 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak **KABUL** edilmiştir.

	Kabul	**Ret**
Başkan: **Dr. Öğr. Üyesi Seda YAMAÇ AKBIYIK** **İstanbul Topkapı Üniversitesi**	☒	☐
Üye: **Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK** **Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi**	☒	☐
Üye: **Prof. Dr. Fatih YILMAZ** **Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi**	☒	☐

GAUSS ORESME SAYILARI VE ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Aybüke ERTAŞ

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Haziran 2024

ÖZET

Bu tezde, Oresme sayılarını kullanarak Gauss Oresme sayılarının tanımını vereceğiz. Ayrıca Cassini özdeşliği ve Binet formülü gibi bazı temel özelliklerini inceliyoruz. Ek olarak kuaterniyonları Gauss Oresme katsayıları ile tanımlayıp bazı önemli özellikleri elde ediyoruz.

Bilim Kodu	:	20401
Anahtar Kelimeler	:	Fibonacci sayıları, Oresme sayıları, Üreteç fonksiyonu, Binet formülü, Catalan özelliği, D'Ocagne's özelliği
Sayfa Adedi	:	45
Tez Danışmanı	:	Prof. Dr. Fatih YILMAZ

GAUSSIAN ORESME NUMBERS AND PROPERTIES

(M.Sc. Thesis)

Aybüke ERTAŞ

ANKARA HACI BAYRAM VELI UNIVERSITY

THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

June 2024

ABSTRACT

In this study, we give a description of Gaussian Oresme numbers by using the Oresme numbers. Also, we examine some of their fundamental characteristics, such as the Cassini identity and the Binet formula. Additionally, we describe quaternions with Gaussian Oresme coefficients and get some important features.

Science Code	:	20401
Keywords	:	Fibonacci numbers, Oresme numbers, Generating function, Binet formula, Catalan identity, D'Ocagne's identity
Page Number	:	45
Supervisor	:	Prof. Dr. Fatih YILMAZ

ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, bu zorlu yolda sonsuz ışığıyla yolumu aydınlatan, zaman ve mekânın önemi olmadığını her an yanımda olmasıyla hissettiren, öğrencisi olmaktan daima gurur ve onur duyduğum saygıdeğer danışman hocam sayın Prof. Dr. Fatih YILMAZ' a,

yüksek lisans yaptığım süre boyunca verdiği 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile beni destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' a

benim bu günlere gelmemi sağlayan, hayatımın her döneminde olduğu gibi bu süreçte de yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen, kıymetlilerim annem Aynur ERTAŞ ile babam Aydın ERTAŞ' a, her zaman moral kaynağım olan, akademik çalışmalarımda ve hayatımın her anında bana yol arkadaşlığı yapan canım dostum Halime ALTUNTAŞ' a

sonsuz sevgilerimi, saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

AYBÜKE ERTAŞ
ANKARA, HAZİRAN 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

TABLOLARIN LİSTESİ viii

SİMGELER ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL BİLGİLER 5

2.1. Rekürans Bağıntıları 5

2.2. Fibonacci, Lucas ve Horadam Sayı Dizileri 6

2.3. Oresme Sayı Dizisi 9

2.4. Kuaterniyonlar 11

2.5. Bazı Gauss Sayıları 16

2.6. Bazı Gauss Kuaterniyon Sayıları 18

3. GAUSS ORESME SAYILARI 21

4. GAUSS ORESME KUATERNİYONLARI 29

5. SONUÇ 39

KAYNAKLAR 41

ÖZGEÇMİŞ 45

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

Tablo 2.2.1. Horadam sayı dizisinin birkaç özel durumu 9

Tablo 2.3.1. Bazı Oresme Sayıları 10

Tablo 2.4.1. Kuaterniyon birimlerinin çarpımı 13

Tablo 2.4.2. Bazı Oresme Kuaterniyonları 16

Tablo 2.5.1. Bazı Gauss Fibonacci Sayıları 16

Tablo 2.5.2. Bazı Gauss Lucas Sayıları 17

Tablo 2.5.4. Genelleştirilmiş Gauss Horadam sayı dizisinin birkaç özel durumu 18

Tablo 3.1. Bazı Gauss Oresme sayıları 21

Tablo 4.1. Bazı Gauss Oresme Kuaterniyonları 29

SİMGELER

Bu tezde kullanılmış simgeler, aşağıda açıklamaları ile verilmiştir.

Simgeler	**Açıklamalar**
H	Kompleks Kuaterniyonların Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\bar{q}$	Kuaterniyon Eşleniği
$\|\|q\|\|$	Kuaterniyon Normu
q^{-1}	Kuaterniyon Tersi
q	Kuaterniyonlar Kümesi
QF_n	n. Fibonacci Kuaterniyonu
$\overline{QF_n}$	n. Fibonacci Kuaterniyonu Eşleniği
$\|QF_n\|$	n. Fibonacci Kuaterniyonu Normu
F_n	n. Fibonacci Sayısı
GFQ_n	n. Gauss Fibonacci Kuaterniyonu
GF_n	n. Gauss Fibonacci Sayısı
GW_n	n. Gauss Horadam Sayısı
GLQ_n	n. Gauss Lucas Kuaterniyonu
GL_n	n. Gauss Lucas Sayısı
QGO_n	n. Gauss Oresme Kuaterniyonu
QGO_n^*	n. Gauss Oresme Kuaterniyonu Eşleniği
$N_{QGO}{}_n$	n. Gauss Oresme Kuaterniyon Normu
GO_n	n. Gauss Oresme Sayısı
W_n	n. Horadam Sayısı
QL_n	n. Lucas Kuaterniyonu
$\overline{QL_n}$	n. Lucas Kuaterniyonu Eşleniği
$\|QL_n\|$	n. Lucas Kuaterniyonu Normu
L_n	n. Lucas Sayısı
QO_n	n. Oresme Kuaterniyonu
O_n	n. Oresme Sayısı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar Kümesi

1. GİRİŞ

Rekürans ilişkileri ile verilen sayı dizileri cebir ve sayılar teorisinde önemli bir yeri vardır. Sayı dizilerinin bu önemi günlük hayatımızda birçok yerde muhteşem bir ahenkle karşımıza çıkmasından kaynaklanmaktadır. Ayrıca sayı dizileri sayesinde Hilbert serilerinde, kuvvet serileri teorisinde, üreteç fonksiyonlarında ve bunlar gibi pek çok alanda kullanılan konularda önemli ilerlemeler elde edilmiştir. Sayılar tarihi de insanlık tarihi kadar çok eskiye dayanır. İlkçağlarda yaşayan insanlar mağara duvarlarına çizgi çizmiş, ağaç dallarına çentik atmış ve böylelikle sayıları kullanmışlardır. İnsanoğlu, zaman içerisinde doğadaki olayları izleyerek yeni sayı sistemleri tanımlanmasını ve geliştirilmesini sağlamıştır. Geliştirilen bu sayı sistemleri matematik ve diğer bilimler ile ilişkilendirilmesi sağlanarak sayı sistemlerinin yeni özellikleri de ortaya çıkarılmıştır. Sayı dizileri içerisinde en çok bilinen Fibonacci sayı dizisidir. Fibonacci dizisinin elemanları Leonardo Fibonacci'nin tavşan probleminden esinlenilerek elde edilmiştir. Leonardo Fibonacci, 1170 senesinde İtalya da doğmuştur. Çocukluğunda babasının işi nedeniyle Arap şehirlerini gezme imkânı bulmuştur. Fibonacci, oralarda kullanılan Arap ve Hint sayı sistemlerini incelemiştir. Bu sayı sisteminin kolaylıklarını görüp o zamanlar İtalya da kullanılan roma rakamı sayı sistemini de geliştirmeye uğraş vermiştir. “Liber Abaci” adlı kitabı Arap sayı sistemini Batı Avrupa'ya tanıtan ilk kitap olmuştur. L. Fibonacci'nin yalnızca bir aritmetik problem olarak gördüğü "Tavşan Problemi" hakkında 19. yüzyıla kadar önemli bir çalışma ortaya çıkmamıştır. Ancak Fibonacci ile beraber bu problem ilgi çekmiş ve sorunun çözümünü sağlayan sayılar Fibonacci sayıları olarak isimlendirilmiştir. Bu dizideki ilk iki terim 1, 1'dir. İlk iki terim dışında sonraki her terim, kendisinden önceki iki terimin toplanmasıyla belirlenir. Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı olan "altın oran" kavramını Kepler literatüre kazandırmıştır. Altın oranın yaklaşık değeri 1,618'dir. Tarih boyunca oyun kartlarından piramit yapımına kadar pek çok alanda Altın Oran kullanılmıştır. Fibonacci sayı dizisi farklı şekillerde genelleştirilmiştir [Bicknell, 1975]. Bazı araştırmacılar başlangıç şartlarını değiştirirken [Horadam, 1961] bazıları da [Edson ve ark., 2009], [Falcon ve ark., 2007] indirgeme bağıntılarını değiştirerek yeni genelleştirmeler elde etmişlerdir. Bahsedilen bu genelleştirmeler ilk kez 1878 yılında Lucas tarafından yapılmıştır [Lucas, 1878]. Daha sonra A. F. Horadam 1965 yılında Fibonacci sayı dizisini genelleyerek Genelleştirilmiş Fibonacci

(Horadam) dizisini tanımlamıştır [Horadam, 1965]. A. F. Horadam tarafından tanımlanan Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi, birkaç güzel ve ilginç dizilere yol açmıştır. Genelleştirilmiş Fibonacci dizisinden (veya Horadam dizisi) yararlanarak elde edilen sayı dizilerinden birisi Oresme sayılarıdır. Oresme sayısını 14. yüzyılda Nicole Oresme tanımlamıştır. Nicola Oresme, bu dizi ile $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \dots, \frac{n}{2^n}$ terimlerinin oluşturduğu rasyonel sayıların toplamını bulmuştur. Horadam 1974 yılında bir tarihçe sunmuş ve bu sayıların birçok özelliğini elde etmiştir [Horadam, 1974]. Oresme sayıları birçok ilginç özelliğe ve birçok bilim alanında uygulamaya sahiptir. Bazı matematiksel kaynaklarda Oresme dizisinin biyolojik uygulamaları olduğunu bulabiliriz [Horadam, 1974].

Matematik dünyasının en dikkat çekici özelliklerine ve ilişkilerine sahip Fibonacci ve Lucas sayılarının doğal genelleştirmelerinden birisi de kompleks sayılar ve kompleks düzlem üzerine yapılmıştır. Bu sayıların kompleks sayılara genelleştirilmesi farklı uygulamalara zemin hazırladığı gibi yeni problemlerin de ortaya çıkmasına neden olmuştur [Vajda, 1989]. İlk olarak A. F. Horadam 1961 ve 1963 yılında yaptığı çalışmalarda Fibonacci sayılarını kompleks sayılara taşıyarak Gauss Fibonacci sayılarını tanımlamış ve birçok özelliğini vermiştir [Horadam,1961], [Horadam, 1963].

J. R. Jordan [Jordan, 1965], Fibonacci sayıları ile Gauss Fibonacci sayıları arasındaki ilişkilerden yola çıkarak muhteşem benzerlikler keşfetmiş ve Gauss Lucas sayılarını tanımlamıştır. 1977 yılında G. Berzsenyi Fibonacci sayılarının karmaşık düzleme doğal bir şekilde genişletilmesini vermiştir [Berzsenyi, 1977]. C.J. Harman 1981 yılında, Horadam ve Berzsenyi'nin yöntemlerinden faydalanarak Gauss Fibonacci dizilerini yeni bir yaklaşımla tanımlamış ve bu dizileri önemli ölçüde karmaşık düzleme genişletmiştir [Harman, 1981]. 1986 yılında S. Pethe ve A.F. Horadam, Gauss Fibonacci sayılarını, C.J. Harman'ın fikrini genişleterek Fibonacci, Pell ve Chebsyshev polinomlarının çarpımlarını bulunduran toplamsal özdeşlikleri ifade etmişlerdir [Pethe ve ark., 1986].

Kompleks sayıları genelleştirme fikri ile ortaya çıkan kuaterniyonlar W. R. Hamilton tarafından 1844 yılında tanımlanmış ve kuaterniyonlar hakkında uzun yıllar boyunca çalışmalar yapmıştır [Hamilton, 1844]. Hamilton'un kuaterniyonları keşfinden önce karmaşık sayılar 2 boyutlu uzayda düşünülmekteydi. Uzaydaki

noktalar en fazla üçlü vektörel olarak gösterilmekle beraber toplama, çıkarma işlemi yapılmakta ancak çarpma ve bölme işlemleri yapılamamaktaydı. Hamilton, karmaşık sayıların 2 boyutlu değil 3 boyutlu uzayda düşünülmesi gerektiğini fark ederek bu karmaşaya bir son vermiştir. Bununla beraber karmaşık sayıların, 3 boyutlu uzaya çarpma işleminde değişme özelliği olmadan genişletilmesini sağlayarak bu sayıların belirttiği noktaların üçlü vektörel olarak değil dörtlü vektörel gösterimle temsil edilmesi ve işlemlere katılması gerektiğini keşfetmiştir.

Kuaterniyonlar, matematikte ve fizikte vektör analiz kavramının daha anlaşılabilir ve gösterim açısından daha basit olmasını sağlamıştır. Kuaterniyonlar, bilgisayar grafikleri, manyetik alan, robotik, orijinal elektrik, grup teorisi, kontrol teorisi, işaret işleme, biyoinformatik, fizikte orijinal elektrik, yörünge mekaniği, modüler aritmetik, tutum kontrolü, bilgisayar simülasyonları gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Horadam, katsayıları Fibonacci sayıları olan Fibonacci kuaterniyonlarını literatüre kazandırmıştır. Horadam'ın çalışmaları diğer araştırmacıların da bu konuya ilgi duymasını sağlamıştır [Horadam, 1963]. Bundan sonra birçok matematikçi Fibonacci kuaterniyonları üzerinde çalışmış ve diğer diziler için de kuaterniyonları tanımlamışlardır. Bu çalışmalara örnek olarak Iyer [Iyer, 1969] ve Halıcı [Halıcı, 2012] tarafından yapılan çalışmalar gösterilebilir. Fibonacci kuaterniyonlarına benzer şekilde Pell kuaterniyonları da 2016 yılında tanımlanmıştır [Çimen ve ark., 2016], [Szynal-Liana ve ark., 2016]. Arslan 2021 yılında ise Gauss-Pell kuaterniyon dizisini tanımlamıştır [Arslan, 2021].

Bu bilgiler ışığında tez çalışmamızda Oresme sayılarını kompleks sayılara taşıyarak Gauss Oresme sayılarını ve katsayıları Gauss Oresme sayıları olan Gauss Oresme Kuaterniyonlarını tanımlıyoruz. Ardından Oresme sayılarının sağladığı özellikleri Gauss Oresme sayıları ve Gauss Oresme Kuaterniyon Sayıları için elde ediyoruz. Tezin bölümleri aşağıda kısaca özetlenmiştir.

Birinci bölümde bazı sayı dizileri, gauss sayı dizileri ve kuaterniyonlar ile ilgili tanımlar verilmiştir. İkinci bölümde ise tezde kullanılacak olan tanım ve teoremler verilmiştir. Sonra ki bölümde ise Gauss Oresme dizisi tanımlanıp, üreteç fonksiyonu, Cassini özdeşliği gibi özellikleri verilmiştir. Son bölümde ise üçüncü bölümde tanımlanan Gauss Oresme sayılarını kuaterniyonların katsayıları olarak kullanarak

Gauss Oresme kuaterniyonları tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Rekürans Bağıntıları

Tanım 2.1.1

Sayı dizilerinde bir terim, kendisinden bir önceki terimlerden yararlanılarak elde ediliyorsa yararlandığımız bu bağıntıya dizinin rekürans bağıntısı denir [Falcon ve ark., 2007], [Kocer ve ark., 2007].

Tanım 2.1.2.

$\forall n \geq k$, sabit c_j $(0 \leq j \leq k-1)$ ve $c_0 \neq 0$ katsayıları için

$$a_n = a_{n-1}c_{k-1} + a_{n-2}c_{k-2} + \cdots + a_{n-k+1}c_1 + a_{n-k}c_0$$

eşitliğini sağlayan (a_n) dizisine k. Mertebeden homojen lineer rekürans dizisi denir. Bu dizinin $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ biçiminde olan ilk k terimine (a_n) dizisinin başlangıç koşulları denir [Everest ve ark., 2003].

Tanım 2.1.3.

Terimleri $a_0, a_1, a_2, \ldots$ şeklinde ifade edilen sayı dizisinin

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

kuvvet serisi açılımına bu dizinin üreteç fonksiyonu denir [Koshy, 2001]. Burada x^n teriminin katsayısı dizinin n. terimidir.

Tanım 2.1.4.

$\{a_n\}$ sayı dizisi için indirgeme bağıntısı,

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} \tag{2.1}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda,

$$x^2 - c_1 x - c_2 = 0$$

denklemine indirgeme bağıntısının karakteristik denklemi denir. Bu denklemin birbirinden farklı kökleri de α_1 ve α_2 olsun. Bu durumda (2.1) bağıntısının genel çözümü;

$$a_n = A\alpha_1^n + B\alpha_2^n$$

olur [Everest ve ark., 2003]. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

2.2 Fibonacci, Lucas ve Horadam Sayı Dizileri

Fibonacci sayı dizisini ilk olarak Leonardo Fibonacci tanımlamıştır. On dokuzuncu yüzyılın başlarından itibaren Fibonacci sayı dizisi ile ilgili yapılan araştırmaların sayısı arttığı için en meşhur sayı dizisi olarak tarihe geçmiştir. Ayrıca bu sayı dizisine dair Fibonacci Derneği kurulmuş ve "The Fibonacci Quartery" adlı dergide bu konu ile alakalı çalışmalar 1963 yılından itibaren yayınlanmaya başlamıştır.

Tanım 2.2.1.

$F_0 = 0, F_1 = 1$ ve $n > 1$ için,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{2.2}$$

şeklindeki diziye Fibonacci sayı dizisi ve elemanlarına da Fibonacci sayıları denir [Vajda, 1989], [Koshy, 2001], [Vorobyov, 1976].

(2.2)' deki eşitliğin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0$$

dır. Burada denklemi sağlayan kökler

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olmak üzere, bu dizinin genel terimi

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = A\alpha^n + B\beta^n$$

olarak tanımlanmıştır. A ve B değerleri,

$n = 0$ için

$$F_0 = A + B = 0$$

$n = 1$ için

$$F_1 = A\alpha + B\beta = 1$$

dir. Bu denklem sistemi çözümlendiğinde

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{ve} \quad B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

şeklinde elde edilir. A ve B değerleri denklemde yazıldığında Binet formülü olarak adlandırılan

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

n. Fibonacci sayısı elde edilir [Binet, 1843]. Binet formülünden hareketle,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \alpha = 1.618\ldots$$

olarak altın orana yakınsadığı görülür [Cahill ve ark., 2003]. Fibonacci sayı dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

dir [Horadam, 1961].

Giovanni D. Cassini'nin tanımladığı Cassini özdeşliğini aşağıdaki teoremde verelim.

Teorem 2.2.1.

$n \geq 1$ için Fibonacci dizisinin Cassini özdeşliği;

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

şeklindedir [Koshy, 2001].

Cassini özdeşliğinin genel hali Eugene Catalan tarafından tanımlanmıştır.

Teorem 2.2.2.

$n \geq r \geq 1$ için Fibonacci dizisinin Catalan özdeşliği;

$$F_{n-r}F_{n+r} - F_n^2 = (-1)^{n-r-1}F_r^2$$

şeklindedir.

Fransız matematikçi Edward Lucas [Lucas, 1961], başlangıç koşulları olarak $L_0 = 2,\ L_1 = 1$ değerlerini kullanarak Lucas dizisini oluşturmuştur ve bu dizi oldukça popüler hale gelmiştir. Lucas dizisinin literatürde sıklıkla kullanılmasının nedeni, Fibonacci dizisi ile arasında birçok ilginç bağıntısının olmasıdır.

Tanım 2.2.2.

$L_1 = 1, L_0 = 2$ ve $n > 1$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.3}$$

şeklindeki diziye Lucas dizisi ve elemanlarına da Lucas sayıları denir.

$\{L_n\}_{n\in N}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_L(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

ve Binet formülü

$$L_n = \alpha^n A + \beta^n B$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.3.

$n \geq 1$ için Lucas dizisinin Cassini özdeşliği;

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}$$

şeklindedir [Koshy, 2001].

Birçok araştırmacı Fibonacci, Lucas gibi dizilerin çeşitli genellemelerini değerlendirmiştir. Bu genellemelerden biri Horadam [Horadam, 1965] tarafından ikinci mertebeden rekürans bağıntısı için keyfi başlangıç koşulları ve keyfi katsayılar kullanılarak elde edilmiştir.

Tanım 2.2.3.

Horadam dizisi $\{W_n(a,b;p,q)\}, n \geq 2$ için ve $a;\ b;\ p$ ve q birer tamsayı olmak üzere, $W_0 = a$ ve $W_1 = b$ başlangıç koşulları ile

$$W_n = pW_{n-1} + qW_{n-2}, \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanmıştır [Horadam, 1965].

(2.4) de verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - px - q = 0$ için α ve β bu denklemin kökleri olarak varsayıldığında $\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $\beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ olur. $A = b - a\beta$ ve $B = a\alpha - b$ olmak üzere bu dizinin Binet formülü

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}$$

biçimindedir. Horadam dizisinin üreteç fonksiyonu ise

$$g_W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n x^n = \frac{W_0 + (W_1 - pW_0)x}{1 - px - qx^2}$$

dir.

Bu dizide $a; b; p$ ve q nun özel değerlerine göre Fibonacci, Lucas, k −Fibonacci, k −Lucas, Pell, k −Pell, Oresme gibi birçok sayı dizileri elde edilebilir. Bazı ünlü sayı dizilerinin genel bir biçimidir [Horadam, 1994], [Yılmaz ve ark., 2022]. Horadam sayı dizisinin bazı özel durumlarını Tablo 2.2.1. de listeledik.

SAYI DİZİSİ	$\{\boldsymbol{W_n(a, b; p, q)}\}$	***OEIS KOD***
Fibonacci	$F_n = \{W_n(0,1;1,1)\}$	A000045
Lucas	$L_n = \{W_n(2,1;1,1)\}$	A000032
Pell	$P_n = \{W_n(0,1;2,1)\}$	A000129
Oresme	$O_n = \left\{W_n\left(0, \frac{1}{2}; 1, -\frac{1}{4}\right)\right\}$	A273692

Tablo 2.2.1. Horadam sayı dizisinin birkaç özel durumu

2.3 Oresme Sayı Dizisi

Oresme dizisi 14. yüzyılda Nicole Oresme (1320–1382) tarafından tanıtılmıştır. 1974 yılında Horadam bu sayılar için çok sayıda özellik elde etmiştir [Horadam, 1974]. Oresme sayılarının birçok ilginç özelliği ve bilimin birçok alanında uygulamaları vardır [Cook, 2004].

Tanım 2.3.1.

Oresme sayı dizisi $\{O_n\}$, başlangıç değerleri $O_0 = 0,\ O_1 = \frac{1}{2}$ olmak üzere $n \geq 2$ için aşağıdaki rekürans bağıntısı ile tanımlanır [Cook, 2004], [Horadam, 1974], [Aydın, 2022]:

$$O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}\, O_{n-2}. \qquad (2.5)$$

Oresme sayı dizisinin bazı değerlerini Tablo 2.3.1. de listeledik.

$\boldsymbol{n}$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\boldsymbol{O_n}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{128}$

Tablo 2.3.1. Bazı Oresme Sayıları

(2.5) de verilen eşitliğin karakteristik denklemi $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ için $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ olur. O halde genel terimi bu dizinin,

$$O_n = \frac{n}{2^n}$$

olarak verilir. Oresme dizisinin üreteç fonksiyonu

$$g_{O_n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} O_n x^n = \frac{\frac{1}{2}x}{1 - x + \frac{1}{4}x^2}$$

dir [Aydın, 2022].

Teorem 2.3.1.

$n \geq 1$ olmak üzere Oresme dizisi için Cassini özdeşliği;

$$O_{n-1}O_{n+1} - O_n^2 = -\frac{1}{2^{2n}}$$

şeklindedir [Horadam, 1974].

Teorem 2.3.2.

$n \geq 1$ olmak üzere Oresme dizisi için Catalan özdeşliği;

$$O_{n-m}O_{n+m} - O_n^2 = -\frac{m^2}{2^{2n}}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.3.

$n \geq 1$ olmak üzere Oresme dizisi için D'Ocagne's özdeşliği;

$$O_n O_{m+1} - O_m O_{n+1} = -\frac{(m-n)}{2^{m+n+1}}$$

şeklindedir. Ayrıca Horadam, Oresme sayıları için bazı özellikleri şu şekilde sunmaktadır [Horadam, 1974]:

$$O_n = \frac{n}{2^n} \text{ (Binet Formülü)},$$

$$O_{n+3} = \frac{3}{4}O_{n+1} - \frac{1}{4}O_n,$$

$$O_{n+3} = \frac{3}{4}O_{n+2} - \frac{1}{16}O_n.$$

Oresme sayıları ve bunların muhteşem özellikleri ile ilgilenen birçok ilginç makale bulunmaktadır. Örneğin; Goy ve Zatorsky, elemanları Oresme sayıları olan Toeplitz-Hessenberg matrislerinin bazı aileleri için determinantları değerlendirmişlerdir [Goy ve ark., 2019]. Özellikle Toeplitz-Hessenberg belirleyicileri aracılığıyla Oresme ile Fibonacci ve Pell dizileri arasında bir bağlantı kurmuşlardır. Soykan 2021 yılında genelleştirilmiş Oresme sayılarını tanıtmış ve bazı özelliklerini vermiştir [Soykan, 2021]. Aydın Oresme hibrit kuaterniyon sayılarını tanıtmış ve özelliklerini sunmuştur [Aydın, 2022].

2.4 Kuaterniyonlar

"İkiye katlama inşası" olarak bilinen ve hiper kompleks sayıları inşa etmek için kullanılan Cayley-Dickson yöntemi 1 boyutlu reel sayılara uygulandığında 2 boyutlu kompleks sayıları, kompleks sayılara uygulandığında 4 boyutlu kuaterniyonları elde etme işlemidir. Cayley-Dickson yöntemi bu hiper kompleks sayıları oluşturmak için en fazla kullanılan yöntemdir [Carmody, 1988].

Tanım 2.4.1.

a, b reel sayılar ve $i^2 = -1$ olmak üzere $a + ib$ şeklindeki sayılara karmaşık sayılar denir. Kompleks sayılar z ile ve bu sayıların oluşturduğu küme de $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

$$\mathbb{C} = \{a + ib \,|a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\},$$

dir [Yaglom, 1968].

$z = a + ib$ karmaşık sayısında a ya bu sayının reel kısmı denir ve $Re(z)$ ile gösterilir, b ye bu sayının sanal kısmı denir ve $Im(z)$ ile gösterilir. Şimdi karmaşık sayıların sağladığı bazı basit aritmetik işlemleri özetleyelim.

$z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ ve λ bir reel sayı olmak üzere

- İki kompleks sayının toplamı:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),$$

- iki kompleks sayının farkı:

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

- iki kompleks sayının çarpımı:

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2),$$

- bir reel sayı ile bir kompleks sayının çarpımı:

$$\lambda z_1 = \lambda a_1 + i\lambda b_1,$$

- bir kompleks sayının eşleniği:

$$\bar{z} = a - ib$$

- bir kompleks sayının normu, kendisi ile eşleniğinin çapımı olup

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = \|z\|$$

şeklindedir.

Yukarıdaki tanımı sağlayan tüm kompleks sayıların kümesi $\mathbb{C}$, 2 boyutlu, değişmeli, birleşmeli cebir yapısındadır. Matematiğin en önemli konularından biri olan kuaterniyonları, karmaşık sayıların dört boyutlu uzaya taşınması amacıyla William R. Hamilton geliştirmiştir (Hamilton, 1843).

Tanım 2.4.2.

Kuaterniyonlar kümesinin, $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde 4 boyutlu bir vektör uzayı olduğu

$$H = \{q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir [Zhang, 1997]. Başka bir deyişle, reel kuaterniyon kümesini aşağıdaki gibi verebiliriz:

$$q = \sum_{m=0}^{3} k_m e_m = k_0 e_0 + k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_3 e_3$$

burada k_0, k_1, k_2 ve k_3 reel katsayılar ve e_0, e_1, e_2 ve e_3 kuaterniyon birimleridir. Bu

kuaterniyon birimleri

$$e_0^2 = 1,$$

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i, \qquad (i = 1,2,3)$$

$$e_1 e_2 = e_3 = -e_2 e_3,$$

$$e_2 e_3 = e_1 = -e_3 e_2,$$

$$e_3 e_1 = e_2 = -e_1 e_3,$$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1$$

özelliklerine sahiptir. Kuaterniyon birimlerinin çarpımı aşağıdaki Tablo 2.4.1. ile verilebileceği iyi bilinmektedir:

·	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	-e_2
e_2	e_2	-e_3	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	-e_1	-1

Tablo 2.4.1 Kuaterniyon birimlerinin çarpımı

Dikkat edilirse $e_1;\ e_2;\ e_3$ kuaterniyon birimleri kendi aralarındaki çarpımları değişme özelliğini sağlamaz.

Hatırlatma 2.4.1

$1, i, j, k$, kuaterniyonların baz elemanları olmak üzere bazı kaynaklarda e_0, e_1, e_2, e_3 olarak dikkate alınmaktadır. Dolayısıyla $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$ olup bu tez çalışmasında her iki gösterimde kullanılacaktır.

Tanım 2.4.3.

Kuaterniyonlarda q_0 skaler kısımdır ve S_q ile gösterilir. $q_1 i + q_2 j + q_3 k$ vektörel kısımdır ve V_q ile gösterilir. Herhangi $p = p_0 + p_1 i + p_2 j + p_3 k$ ve $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ iki kuaterniyon olmak üzere

- Kuaterniyonlarda toplama işlemi

$$p + q = S_{(p+q)} + V_{(p+q)},$$

- kuaterniyonlarda vektör çarpımı

$$p \times q = (p_2q_3 - p_3q_2)i + (p_3q_1 - p_1q_3)j + (p_1q_2 - p_2q_1)k,$$

- iki kuaterniyonun çarpımı

$$pq = (p_0\, q_0 - p_1\, q_1 - p_2\, q_2 - p_3\, q_3\,) + (p_0\, q_1 + p_1\, q_0 + p_2\, q_3 - p_3\, q_2\,)i$$

$$+(p_0\, q_2 + p_2\, q_0 + p_3\, q_1 - p_1\, q_3\,)j + (p_0\, q_3 + p_3\, q_0 + p_1\, q_2 - q_2\, p_1\,)k$$

şeklindedir.

- Skaler çarpım

$$\lambda q \;=\; (\lambda q_0) \;+\; (\lambda q_1)i \;+\; (\lambda q_2)j \;+\; (\lambda q_3)k$$

olarak tanımlanır.

- q'nun eşleniği

$$\bar{q} = S_q - V_q$$

şeklinde verilir. Ayrıca, kuaterniyon normu

$$\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$$

olarak ifade edilir. Reel kuaterniyon q'nun tersi

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{\|q\|}, \qquad \|q\| \neq 0$$

dir.

Horadam n. Fibonacci kuaterniyonunu 1963 yılında yaptığı çalışmada aşağıdaki gibi tanımlamıştır [Horadam, 1963].

Tanım 2.4.4.

i, j, k baz elemanları olmak üzere, n. Fibonacci kuaterniyonu

$$QF_n = F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+3}k$$

dir. F_n, n. Fibonacci sayısıdır.

QF_n'in eşleniği

$$\overline{QF_n} = F_n - F_{n+1}i - F_{n+2}j - F_{n+3}k$$

şeklindedir [Halıcı, 2012]. Benzer şekilde n. Fibonacci kuaterniyonu QF_n'in normu

$$|QF_n| = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$$

şeklindedir. Fibonacci kuaterniyonları Hamilton'dan bu yana birçok yazar tarafından incelenmiştir. Örneğin Iyer 1969 yılında Fibonacci kuaterniyonlarına [Iyer, 1969] benzer şekilde Lucas kuaterniyonlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.4.5.

i, j, k baz elemanları olmak üzere, n. Lucas kuaterniyonu

$$QL_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}j + L_{n+3}k$$

şeklinde tanımlanır. Burada L_n, n. Lucas sayısıdır. n. Lucas kuaterniyonu QL_n'in eşleniği

$$\overline{QL_n} = L_n - L_{n+1}i - L_{n+2}j - L_{n+3}k$$

şeklindedir. Benzer şekilde n. Lucas kuaterniyonu QL_n'in normu

$$|QL_n| = L_n^2 + L_{n+1}^2 + L_{n+2}^2 + L_{n+3}^2$$

şeklindedir.

Literatürde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ve genellemeleri ile ilgili çalışmalar vardır [Akyiğit ve ark., 2014], [Akbıyık ve ark., 2022]. Alves 2019 yılında, Oresme kuaterniyonlarını O_n, aşağıdaki şekilde tanımlamıştır [Alves, 2019].

Tanım 2.4.6.

i, j, k baz elemanları olmak üzere, n. Oresme kuaterniyonu

$$QO_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}j + O_{n+3}k$$

şeklinde tanımlanır. Burada O_n, n. Oresme sayısıdır. Oresme kuaterniyonlarının rekürans bağıntısı $n \geq 1$ için

$$QO_{n+1} = QO_n - \frac{1}{4}QO_{n-1}$$

dir. Burada $QO_0 = \frac{1}{2}i + \frac{2}{4}j + \frac{3}{8}k$, $QO_1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{4}i + \frac{3}{8}j + \frac{4}{16}k$ dır. Tablo 2.4.2.' de, bazı Oresme kuaterniyonlarını listeledik.

n	0	1	2
QO_n	$\frac{1}{2}e_1+\frac{2}{4}e_2+\frac{3}{8}e_3$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}e_1+\frac{3}{8}e_2+\frac{4}{16}e_3$	$\frac{2}{4}+\frac{3}{8}e_1+\frac{4}{16}e_2+\frac{5}{32}e_3$

Tablo 2.4.2. Bazı Oresme Kuaterniyonları

2.5 Bazı Gauss Sayıları

Gauss sayıları, 1832'de C.F. Gauss tarafından incelenmiş, katsayıları tam sayılar olan karmaşık sayılardır [Gauss, 1832]. Gauss Fibonacci sayılarını, Horadam 1963 yılında yaptığı çalışmasında tanımlamıştır [Horadam, 1963]. Ardından Jordan [Jordan, 1965] ve Berzsenyi [Berzsenyi, 1977] Gauss Fibonacci sayıları üzerine çalışmalar yapmışlardır.

Tanım 2.5.1.

$GF_0 = i$ ve $GF_1 = 1$ başlangıç değerleri ile birlikte GF_n, n. Gauss Fibonacci sayısı $n \geq 2$ için

$$GF_n = GF_{n-1} + GF_{n-2}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Gauss Fibonacci sayı dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
GF_{n}	i	1	$1+i$	$2+i$	$3+2i$	$5+3i$	$8+5i$	$13+8i$

Tablo 2.5.1. Bazı Gauss Fibonacci Sayıları

Gauss Fibonacci dizisinin Binet formülü ise;

$$GF_{n+1} = \frac{\alpha^n - \beta^n + i(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir ve $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Gauss Fibonacci sayısı için

$$GF_n = F_n + iF_{n-1}$$

özdeşliği sağlanır [Jordan, 1965]. Burada F_n, n. Fibonacci sayısıdır.

Teorem 2.5.1.

$n \geq 1$ olmak üzere Cassini özdeşliği

$$GF_{n-1}GF_{n+1} - GF_n^2 = (-1)^n(2-i)$$

şeklindedir [Harman, 1981].

Tanım 2.5.2.

$n \geq 2$ ve $GL_0 = 2 - i, GL_1 = 1 + 2i$ için

$$GL_n = GL_{n-1} + GL_{n-2}$$

şeklinde tanımlı sayı dizisine Gauss Lucas sayı dizisi denir.

GL_n dizisinin birkaç terimini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

n	0	1	2	3	4	5	6
GL_{n}	$2 - i$	$1 + 2i$	$3 + i$	$4 + 3i$	$7 + 4i$	$11 + 7i$	$18 + 11i$

Tablo 2.5.2. Bazı Gauss Lucas Sayıları

Gauss Lucas dizisinin Binet formülü ise;

$$GL_{n+1} = \alpha^n + \beta^n + i(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1})$$

olur. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. Gauss Lucas sayısı için

$$GF_n = L_n + iL_{n-1}$$

özdeşliği sağlanır. Burada $L_n, n.$ Lucas sayısıdır.

Teorem 2.5.2.

$n \geq 1$ için Cassini özdeşliği

$$GL_{n-1}GL_{n+1} - GL_n^2 = 5(-1)^{n+1}(2 - i)$$

şeklindedir.

Pethe ve Horadam genelleştirilmiş Gauss Fibonacci (Horadam) dizisini aşağıdaki gibi tanımlamışlardır [Pethe ve ark., 1986]:

Tanım 2.5.3.

$\{GW_n\} = \{GW_n(GW_0, GW_1; p, q)\}$ genelleştirilmiş Gauss Horadam dizisi başlangıç koşulları $GW_0 = a, GW_1 = b$ olmak üzere ve $n \geq 0$ için,

$$GW_{n+2} = pGW_{n+1} + qGW_n \tag{2.6}$$

tekrarlama bağıntısı ile tanımlanan dizidir. Genelleştirilmiş Gauss Horadam sayı dizisinin iyi bilinen bazı özel durumlarını Tablo 2.5.4. de listeledik.

GAUSS SAYI DİZİSİ	$\boldsymbol{GW_n(GW_0, GW_1; p, q)}$
Gauss Fibonacci	$GF_n = GW_n(i, 1; 1,1)$
Gauss Lucas	$GL_n = GW_n(2 - i, 1 + 2i; 1,1)\}$
Gauss Pell	$GP_n = GW_n(i, 1; 2,1)\}$

Tablo 2.5.4. Genelleştirilmiş Gauss Horadam sayı dizisinin birkaç özel durumu

2.6 Bazı Gauss Kuaterniyon Sayıları

Elemanları Gauss Fibonacci sayıları olan kuaterniyon dizisi Halıcı ile Cerda-Morales tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmış olup, bu dizinin elemanlarına Gauss Fibonacci kuaterniyon sayıları adı verilmiştir [Halıcı ve ark., 2021].

Tanım 2.6.1.

Gauss Fibonacci kuaterniyon dizisi $\{GFQ_n\}_{n\geq 0}$,

$$GFQ_n = GF_n + GF_{n+1}i + GF_{n+2}j + GF_{n+3}k$$

dir. Burada

$$GFQ_0 = (i, 1, 1 + i, 2 + i), \qquad GFQ_1 = (1, 1 + i, 2 + i, 3 + 2i)$$

dir. GF_n, n. Gauss Fibonacci sayısı ve i, j, k ise baz elemanlarıdır.

Bu sayı dizisinin rekürans bağıntısı $n \geq 2$ için,

$$GFQ_n = GFQ_{n-1} + GFQ_{n-2}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Halıcı, Gauss Lucas kuaterniyonlarını 2021 yılında yaptığı çalışmada tanımlamış ve bazı özelliklerini vermiştir [Halıcı, 2021].

Tanım 2.6.2.

Gauss Lucas kuaterniyon sayı dizisi $\{GLQ_n\}_{n\geq 0}$,

$$GLQ_n = GL_n + GL_{n+1}i + GL_{n+2}j + GL_{n+3}k$$

şeklinde tanımlanır. Bu dizinin başlangıç değerleri

$$GLQ_0 = (2 - i, 1 + 2i, 3 + i, 4 + 3i), \qquad GLQ_1 = (1 + 2i, 3 + i, 4 + 3i, 7 + 4i)$$

dir. Burada GL_n, n. Gauss Lucas sayısı ve i, j, k ise baz elemanlarıdır. Aynı zamanda Gauss Lucas kuaterniyon sayı dizisinin rekürans bağıntısı $n \geq 2$ için,

$$GLQ_n + GLQ_{n+1} = GLQ_{n+2}$$

şeklinde tanımlanmıştır [Halıcı, 2021].

Bu tez çalışmasındaki üçüncü ve dördüncü bölüm 2023 yılında makale olarak yayınlanmıştır [Yılmaz ve Ertaş, 2023].

3. GAUSS ORESME SAYILARI

Tanım 3.1.

Genelleştirilmiş Gauss Horadam dizisinde (2.6) başlangıç koşulları $a = -2i, b = \frac{1}{2}$ ve $p = 1, q = -\frac{1}{4}$ olarak seçilirse Gauss Oresme dizisini elde ederiz. Diğer bir ifade ile, GO_n ile gösterilen Gauss Oresme dizisi, başlangıç koşulları $GO_0 = -2i, GO_1 = \frac{1}{2}$ olan $n \geq 2$ için

$$GO_n = GO_{n-1} - \frac{1}{4} GO_{n-2} \tag{3.1}$$

şeklindeki rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Gauss Oresme dizisi için

$$GO_n = O_n + iO_{n-1}$$

özdeşliği sağlanır. Burada $O_n, n.$ Oresme sayısıdır.

Tablo 3.1'te Gauss Oresme sayılarının bazı değerlerini listeledik.

n	0	1	2	3	4	5	6
GO_n	$-2i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+i}{2}$	$\frac{3+4i}{8}$	$\frac{2+3i}{8}$	$\frac{5+8i}{32}$	$\frac{3+5i}{8}$

Tablo 3.1 Bazı Gauss Oresme sayıları

Teorem 3.1. (Üreteç Fonksiyonu)

Gauss Oresme sayıları için üreteç fonksiyon şu şekilde verilir:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (GO_n)x^n = \frac{-2i + \left(\frac{1}{2} + 2i\right)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}}.$$

İspat:

Üreteç Fonksiyonunun tanımından yararlanarak, şunları elde ederiz:

$$f(x) = GO_0 + GO_1 x + GO_2 x^2 + GO_3 x^3 + \cdots + GO_n x^n + \cdots$$

$$-xf(x) = -GO_0 x - GO_1 x^2 - GO_2 x^3 - GO_3 x^4 - \cdots - GO_{n-1} x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{4}x^2 f(x)$$
$$= \frac{1}{4}GO_0x^2 + \frac{1}{4}GO_1x^3 + \frac{1}{4}GO_2x^4 + \frac{1}{4}GO_3x^5 + \cdots + \frac{1}{4}GO_{n-2}x^n + \cdots$$

buradan

$$\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right)f(x) = GO_0 + (GO_1 - GO_0)x + \left(GO_2 - GO_1 + \frac{1}{4}GO_0\right)x^2 + \left(GO_3 - GO_2 + \frac{1}{4}GO_1\right)x^3 \vdots + \left(GO_n - GO_{n-1} + \frac{1}{4}GO_{n-2}\right)x^n + \cdots$$

ve sonuç olarak;

$$f(x) = \frac{GO_0 + (GO_1 - GO_0)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}} = \frac{-2i + \left(\frac{1}{2} + 2i\right)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}}.$$

böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2. (Binet Formülü)

$n \geq 0$ için

$$GO_n = 2^{-n}(-A + B(n+1))$$

burada

$$A = (4i + 1), \qquad B = (2i + 1).$$

İspat:

Gauss Oresme sayılarının tanımından ve üreteç fonksiyonundan yararlanarak, şunları elde ederiz:

$$f(x) = GO_0 + GO_1x + GO_2x^2 + GO_3x^3 + \cdots + GO_nx^n + \cdots$$

$$-xf(x) = -GO_0x - GO_1x^2 - GO_2x^3 - GO_3x^4 - \cdots - GO_{n-1}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{4}x^2f(x) = \frac{1}{4}GO_0x^2 + \frac{1}{4}GO_1x^3 + \frac{1}{4}GO_2x^4 + \frac{1}{4}GO_3x^5 + \cdots + \frac{1}{4}GO_{n-2}x^n + \cdots$$

buradan

$$\begin{aligned}\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right)f(x) = {} & GO_0 + (GO_1 - GO_0)x \\ & + \left(GO_2 - GO_1 + \frac{1}{4}GO_0\right)x^2 \\ & + \left(GO_3 - GO_2 + \frac{1}{4}GO_1\right)x^3 \\ & \vdots \\ & + \left(GO_n - GO_{n-1} + \frac{1}{4}GO_{n-2}\right)x^n + \cdots\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{GO_0 + (GO_1 - GO_0)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}} \\ &= \frac{-2i + \left(\frac{1}{2} + 2i\right)x}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2} \\ &= \frac{A}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)} + \frac{B}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $A = (4i + 1)$ ve $B = (2i + 1)$ dir. Aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}\frac{-2i + \left(\frac{1}{2} + 2i\right)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}} &= -\frac{(4i + 1)}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)} + \frac{(2i + 1)}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} -A2^{-n}x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} B2^{-n}(n + 1)x^n\right)\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-A2^{-n} + B2^{-n}(n+1)\right)x^n$$

burada

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-A2^{-n} + B2^{-n}(n+1)\right)x^n$$

dir. Yani

$$\begin{aligned} GO_n &= -A2^{-n} + B2^{-n}(n+1) \\ &= 2^{-n}(-A + B(n+1)) \end{aligned}$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 3.1.

$n = 4$ için,

$$\begin{aligned} GO_4 &= 2^{-4}(-A + 5B) \\ &= 2^{-4}\left(-(1+4i) + 5(1+2i)\right) \\ &= \frac{3i+2}{8} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3. (Cassini Özelliği)

$n \geq 1$ için

$$GO_{n+1}GO_{n-1} - GO_n^2 = -2^{-2n}B^2$$

özelliği sağlanır.

İspat:

Binet formülünden

$$\begin{aligned} GO_{n+1}GO_{n-1} - GO_n^2 &= \left(2^{-n-1}\left(-A + B(n+2)\right)\right)\left(2^{-n+1}(-A + Bn)\right) \\ &\quad - \left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)^2 \\ &= 2^{-2n}(A^2 - ABn - AB(n+2) + B^2(n+2)n) \\ &\quad -2^{-2n}(A^2 - 2AB(n+1) + B^2(n+1)^2) \\ &= -2^{-2n}B^2 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $A = (4i + 1)$ ve $B = (2i + 1)$ dir.

Örnek 3.2.

$n = 5$ için,

$$\begin{aligned} GO_6GO_4 - GO_5^2 &= -2^{-10}B^2 \\ &= -2^{-10}(2i+1)^2 \\ &= \frac{3-4i}{2^{10}} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.4. (Catalan Özelliği)

$n, r \geq 0$ için

$$GO_{n+r}GO_{n-r} - GO_n^2 = -2^{-2n}B^2r^2$$

özelliği doğrudur.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} &GO_{n+r}GO_{n-r} - GO_n^2 \\ &\quad = \left(2^{-n-r}\left(-A + B(n+r+1)\right)\right)\left(2^{-n+r}(-A + B(n-r+1))\right) \\ &\qquad - \left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)^2 \\ &\quad = 2^{-2n}(A^2 - 2ABn - 2AB + B^2(n^2 + 2n - r^2 + 1)) \\ &\qquad -2^{-2n}(A^2 - 2ABn - 2AB + B^2n^2 + 2B^2n + B^2) \\ &\quad = -2^{-2n}B^2r^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $A = (4i + 1)$ ve $B = (2i + 1)$ dir.

Örnek 3.3.

$n = 4, r = 1$ için

$$\begin{aligned} GO_5GO_3 - GO_4^2 &= -2^{-8}(2i+1)^2 1^2 \\ &= -2^{-8}(2i+1)^2 \\ &= \frac{3-4i}{2^8} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.5. (D'Ocagne's Özelliği)

$n, m \geq 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$GO_{m+1}GO_n - GO_mGO_{n+1} = -2^{-m-n-1}B^2(m-n)$$

özelliği doğrudur.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} GO_n - GO_mGO_{n+1} &= 2^{-m-n-1}(A^2 - ABn - AB - ABm - 2AB \\ &\quad +(B^2m + 2B^2)(n+1) - 2^{-m-n-1}(A^2 - ABn - 2AB \\ &\quad -ABm - AB + (B^2m + B^2)(n+2)) \\ &= -2^{-m-n-1}B^2(m-n) \end{aligned}$$

elde edilir. $A = (4i+1)$ ve $B = (2i+1)$ dir.

Örnek 3.4.

$n = 4\,, m = 1$ için

$$\begin{aligned} GO_2GO_4 - GO_1GO_5 &= 2^{-1-4-1}B^2(1-4) \\ &= -2^{-6}3(2i+1)^2 \\ &= 2^{-6}(9-12i) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.6. (Vajda Özelliği)

$n, i, j \geq 0$ için

$$GO_{n+m}GO_{n+r} - GO_nGO_{n+m+r} = 2^{-2n-m-r}B^2mr$$

özelliği doğrudur.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} GO_{n+m}GO_{n+r} - GO_nGO_{n+m+r} &= (2^{-n-m}(-A + Bn + Bm + B)) \\ &\quad \times (2^{-n-r}(-A + Bn + Br + B)) \\ &\quad -(2^{-n}(-A + Bn + B)(2^{-n-m-r}(-A \\ &\quad + Bn)) \end{aligned}$$

$$+2^{-n-m-r}(Bm + Br + B)$$
$$= 2^{-2n-i-j}B^2ij$$

elde edilir. $A = (4i + 1)$ ve $B = (2i + 1)$ dir.

4. GAUSS ORESME KUATERNİYONLARI

Bu bölümde, üçüncü bölümde tanımladığımız Gauss Oresme sayılarını kullanarak Gauss Oresme Kuaterniyonlarını tanımlıyoruz ve bazı özelliklerini inceliyoruz.

Tanım 4.1. Gauss Oresme katsayılarına sahip kuaterniyonlar

$$QGO_n = GO_n e_0 + GO_{n+1} e_1 + GO_{n+2} e_2 + GO_{n+3} e_3 = QO_n + iQO_{n-1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada GO_n, n. Gauss Oresme sayısıdır. Aynı zaman da $GO_n = O_n + iO_{n-1}$ denklemini de sağlar. Burada O_n, n. Oresme sayısıdır.

Gauss Oresme katsayılarına sahip kuaterniyonların bazı değerlerini Tablo 4.1.'te listeledik.

n	QGO_n
0	$-2i + \frac{e_1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right) e_2 + \left(\frac{3+4i}{8}\right) e_3$
1	$\frac{1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right) e_1 + \left(\frac{3+4i}{8}\right) e_2 + \left(\frac{2+3i}{8}\right) e_3$
2	$\left(\frac{i+1}{2}\right) + \left(\frac{3+4i}{8}\right) e_1 + \left(\frac{2+3i}{8}\right) e_2 + \left(\frac{5+8i}{32}\right) e_3$
3	$\left(\frac{3+4i}{8}\right) + \left(\frac{2+3i}{8}\right) e_1 + \left(\frac{5+8i}{32}\right) e_2 + \left(\frac{3+5i}{32}\right) e_3$

Tablo 4.1. Bazı Gauss Oresme Kuaterniyonları

Üreteç fonksiyonunun, sonsuz bir dizinin biçimsel bir kuvvet serisinin katsayıları olarak kodlanmasının bir yolu olduğu bilinmektedir. Gauss Oresme katsayıları ile kuaterniyonlar için üreteç fonksiyonunu hesaplayalım.

Teorem 4.1. (Üreteç Fonksiyonu)

Gauss Oresme kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (QGO_n) x^n$$

$$= \frac{\left[-2i + \frac{e_1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e_2 + \left(\frac{3+4i}{8}\right)e_3\right] + x\left[\left(\frac{4i+1}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)e_1 - \left(\frac{1}{8}\right)e_2 - \left(\frac{1+i}{8}\right)e_3\right]}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

şeklinde verilir.

İspat:

Üreteç Fonksiyonunun tanımından yararlanarak, şunları elde ederiz:

$$g(x) = QGO_0 + QGO_1 x + QGO_2 x^2 + QGO_3 x^3 + \cdots + QGO_n x^n + \cdots$$

$$-xg(x) = -QGO_0 x - QGO_1 x^2 - QGO_2 x^3 - QGO_3 x^4 - \cdots - QGO_{n-1} x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{4}x^2 g(x) = \frac{1}{4}QGO_0 x^2 + \frac{1}{4}QGO_1 x^3 + \frac{1}{4}QGO_2 x^4 + \cdots + \frac{1}{4}QGO_{n-2} x^n + \cdots$$

buradan

$$\begin{aligned}\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right)g(x) = {} & QGO_0 + (QGO_1 - QGO_0)x \\ & + \left(QGO_2 - QGO_1 + \frac{1}{4}QGO_0\right)x^2 \\ & + \left(QGO_3 - QGO_2 + \frac{1}{4}QGO_1\right)x^3 \\ & \vdots \\ & + \left(QGO_n - QGO_{n-1} + \frac{1}{4}QGO_{n-2}\right)x^n + \cdots\end{aligned}$$

ve sonuç olarak;

$$g(x) = \frac{QGO_0 + (QGO_1 - QGO_0)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

$$= \frac{\left[-2i + \frac{e_1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e_2 + \left(\frac{3+4i}{8}\right)e_3\right] + x\left[\left(\frac{4i+1}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)e_1 - \left(\frac{1}{8}\right)e_2 - \left(\frac{1+i}{8}\right)e_3\right]}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

bulunur.

Teorem 4.2. (Binet Formülü)

Binet formülü $n \geq 0$ için

$$QGO_n = 2^{-n}(-A + B(n+1))$$

dir. Burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

şeklindedir.

İspat:

Gauss Oresme kuaterniyon sayılarının üreteç fonksiyonundan ve tanımından yararlanarak, şunları elde ederiz:

$$g(x) = QGO_0 + QGO_1x + QGO_2x^2 + QGO_3x^3 + \cdots + QGO_nx^n + \cdots$$

$$-xg(x) = -QGO_0x - QGO_1x^2 - QGO_2x^3 - QGO_3x^4 - \cdots - QGO_{n-1}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{4}x^2g(x) = \frac{1}{4}QGO_0x^2 + \frac{1}{4}QGO_1x^3 + \frac{1}{4}QGO_2x^4 + \cdots + \frac{1}{4}QGO_{n-2}x^n + \cdots$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\left(1 - x + \frac{1}{4}x^2\right)g(x) = {} & QGO_0 + (QGO_1 - QGO_0)x \\ & + \left(QGO_2 - QGO_1 + \frac{1}{4}QGO_0\right)x^2 \\ & + \left(QGO_3 - QGO_2 + \frac{1}{4}QGO_1\right)x^3 \\ & \vdots \\ & + \left(QGO_n - QGO_{n-1} + \frac{1}{4}QGO_{n-2}\right)x^n + \cdots\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak;

$$g(x) = \frac{QGO_0 + (QGO_1 - QGO_0)x}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

$$= \frac{\left[-2i + \frac{e_1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e_2 + \left(\frac{3+4i}{8}\right)e_3\right] + x\left[\left(\frac{4i+1}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)e_1 - \left(\frac{1}{8}\right)e_2 - \left(\frac{1+i}{8}\right)e_3\right]}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

$$= -\frac{A}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)} + \frac{B}{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2}$$

elde ederiz. Burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

dir. Aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$\frac{\left[-2i + \frac{e_1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e_2 + \left(\frac{3+4i}{8}\right)e_3\right] + x\left[\left(\frac{4i+1}{2}\right) + \left(\frac{i}{2}\right)e_1 - \left(\frac{1}{8}\right)e_2 - \left(\frac{1+i}{8}\right)e_3\right]}{1 - x + \frac{x^2}{4}}$$

$=$

$$= -\frac{A}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)} + \frac{B}{\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} -A2^{-n}x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} B2^{-n}(n+1)x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\big(-A + B(n+1)\big)x^n$$

buradan

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\big(-A2^{-n} + B2^{-n}(n+1)\big)x^n$$

dir. Yani

$$QGO_n = -A2^{-n} + B2^{-n}(n+1)$$

$$= 2^{-n}(-A + B(n+1))$$

dir.

Örnek 4.1.

$n = 1$ için,

$$QGO_1 = 2^{-1}\left(-A + B(1+1)\right)$$
$$= \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1+i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{3+4i}{8}\right)e_2 + \left(\frac{2+3i}{8}\right)e_3\right]$$

bulunur.

Teorem 4.3. (Cassini Özelliği)

$n > 0$ için

$$QGO_{n+1}QGO_{n-1} - QGO_n^2 = -2^{-2n}B^2$$

özelliği sağlanır.

İspat:

Binet formülünden

$$QGO_{n+1}QGO_{n-1} - QGO_n^2 = \left(2^{-n-1}\left(-A + B(n+2)\right)\right)\left(2^{-n+1}(-A + Bn)\right)$$
$$-\left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)^2$$
$$= -2^{-2n}B^2$$

elde edilir. Burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.2.

$n = 3$ için,

$$QGO_4QGO_2 - QGO_3^2 = -2^{-6}B^2$$
$$= -2^{-6}\left(\frac{1+2i}{8}\right)^2 [8 + 4e_1 + 2e_2 + e_3]^2$$
$$= -2^{-12}(4i-3)(43 + 68e_1 + 24e_2 + 32e_3)$$

bulunur.

Teorem 4.4. (Catalan Özelliği)

$n, r \geq 0$ için

$$QGO_{n+r}QGO_{n-r} - QGO_n^2 = -2^{-2n}B^2r^2$$

özelliği doğrudur.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$QGO_{n+r}QGO_{n-r} - QGO_n^2 = \left(2^{-n-r}\left(-A + B(n+r+1)\right)\right)\left(2^{-n+r}\left(-A + B(n-r+1)\right)\right) - \left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)^2$$
$$= 2^{-2n}(A^2 - 2ABn - 2AB + B^2(n^2 + 2n - r^2 + 1))$$
$$-2^{-2n}(A^2 - 2ABn - 2AB + B^2n^2 + 2B^2n + B^2)$$
$$= -2^{-2n}B^2r^2,$$

burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.3.

$n = 2, r = 1$ için

$$QGO_3QGO_1 - QGO_2^2$$
$$= -2^{-4}\left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]^2 1^2$$

$$= -2^{-4}\left(\frac{1+2i}{8}\right)^2 [8 + 4e_1 + 2e_2 + e_3]^2$$
$$= -2^{-10}(4i-3)(43 + 68e_1 + 24e_2 + 32e_3)$$

bulunur.

Teorem 4.5. (D'Ocagne's Özelliği)

$n, m \geq 0$ tamsayıları ve $m > n$ için

$$QGO_{m+1}QGO_n - QGO_mQGO_{n+1} = -2^{-m-n-1}B^2(m-n)$$

özelliği sağlanır.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$QGO_{m+1}QGO_n - QGO_mQGO_{n+1}$$
$$= \left(2^{-m-1}\left(-A + B(m+2)\right)\right)\left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)$$
$$-\left(2^{-m}\left(-A + B(m+1)\right)\right)\left(2^{-n-1}\left(-A + B(n+2)\right)\right)$$
$$= -2^{-m-n-1}B^2(m-n)$$

burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.6. (Vajda Özdeşliği)

$n, m, r \geq 0$ için

$$QGO_{n+m}QGO_{n+r} - QGO_nQGO_{n+m+r} = 2^{-2n-m-r}B^2mr$$

özelliği sağlanır.

İspat:

Binet formülü dikkate alınarak;

$$QGO_{n+m}QGO_{n+r} - QGO_nQGO_{n+m+r}$$
$$= \left(2^{-n-m}\left(-A + B(n+m+1)\right)\right)\left(2^{-n-r}\left(-A + B(n+r+1)\right)\right)$$
$$-\left(2^{-n}\left(-A + B(n+1)\right)\right)\left(2^{-n-m-r}\left(-A + B(n+m+r+1)\right)\right)$$
$$= 2^{-2n-i-j}B^2ij$$

burada

$$A = \left[1 + 4i + ie_1 - \frac{1}{4}e_2 - \left(\frac{1+i}{4}\right)e_3\right]$$

ve

$$B = \left[1 + 2i + \left(\frac{1+2i}{2}\right)e_1 + \left(\frac{1+2i}{4}\right)e_2 + \left(\frac{1+2i}{8}\right)e_3\right]$$

dir.

Tanım 4.2.

Gauss Oresme katsayılarına sahip kuaterniyonların eşleniği, karmaşık eşleniği ve normu sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$QGO_n^* = GO_ne_0 - GO_{n+1}e_1 - GO_{n+2}e_2 - GO_{n+3}e_3,$$

$$N_{QGO}{}_n = QGO_nQGO_n^* = GO_n^2 + GO_{n+1}^2 + GO_{n+2}^2 + GO_{n+3}^2.$$

Teorem 4.7:

$n > 1$ için, Gauss Oresme katsayılarına sahip kuaterniyonlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$QGO_{n+1} = QGO_n - \frac{1}{4}QGO_{n-1}$$

$$QGO_n + QGO_n^* = 2GO_n$$

İspat:

(3.1) denklemini ve Gauss Oresme kuaterniyonunun tanımını kullanarak,

$$QGO_n - \frac{1}{4}QGO_{n-1} = (GO_n + GO_{n+1}e_1 + GO_{n+2}e_2 + GO_{n+3}e_3)$$
$$-\frac{1}{4}(GO_{n-1} + GO_n e_1 + GO_{n+1}e_2 + GO_{n+2}e_3)$$
$$= \left(GO_n - \frac{1}{4}\,GO_{n-1}\right) + \left(GO_{n+1} - \frac{1}{4}\,GO_n\right)e_1$$
$$+\left(GO_{n+2} - \frac{1}{4}\,GO_{n+1}\right)e_2 + \left(GO_{n+3} - \frac{1}{4}\,GO_{n+2}\right)e_3$$
$$= GO_{n+1} + GO_{n+2}e_1 + GO_{n+3}e_2 + GO_{n+4}e_3$$
$$= QGO_{n+1}$$

bulunur.

Gauss Oresme kuaterniyonunun tanımı ve kuaterniyon eşleniği yardımı ile

$$QGO_n + QGO_n^* = (GO_n + GO_{n+1}e_1 + GO_{n+2}e_2 + GO_{n+3}e_3)$$
$$+(GO_n e_0 - GO_{n+1}e_1 - GO_{n+2}e_2 - GO_{n+3}e_3)$$
$$= 2GO_n$$

elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5. SONUÇ

Bu yazıda, Horadam tarafından [Horadam, 1974] tanımlanan Oresme sayılarını ele alıyoruz ve Gauss Oresme sayılarını tanıtıyoruz. Daha sonra Binet formülü, üreteç fonksiyonu, Cassini özdeşliği gibi bazı karakteristik özelliklerini inceliyoruz. Sonraki bölümde, Gauss Oresme katsayıları ile kuaterniyonları tanımlıyoruz ve onlar için bazı özellikler elde ediyoruz. Son olarak, sonuçları bazı örneklerle açıklıyoruz.

KAYNAKLAR

Akbıyık, M., Yamaç Akbıyık, S., Yılmaz, F. (2022). "The matrices of Pauli quaternions, their De Moivre's and Euler's formulas", *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 19 (11), 2250175-610.

Akyiğit, M., Kösal, H. H., Tosun, M. (2014). "Fibonacci generalized quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 24 (3), 631-641.

Alves, F. R. V. (2019). "Sequência de Oresme e algumas propriedades (matriciais) generalizadas", *C Q D- Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 40-44.

Arslan, H. (2021). "Gaussian Pell and Gaussian Pell-Lucas Quaternions", *Filomat*, 35 (5), 1609–1617.

Aydın, F. T. (2022). "Oresme Hybrid Quaternion Numbers", *Authorea Preprints*.

Berzsenyi, G. (1977). "Gaussian Fibonacci Numbers", *The Fibonacci Quarterly*, 15 (3), 233- 236.

Bicknell, M. (1975). "A Primer on the Pell Sequence and Related Sequences", *Fibonacci Quarterly*, 13 (4), 345-349.

Binet, J. P. (1843). "Mémoire sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies, d'un ordre quelconque, à coefficients variables", *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris)*, 17, 559-567.

Cahill, N. C., D'Ericco, J. R., Spance, J. P. (2003). "Complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers", *The Fibonacci Quarterly*, 41 (1), 13-19.

Carmody, K. (1988). "Circular and Hyperbolic quaternions, octonions and sedenions", *Appl. Math.Comput.*, 28, 47.72.

Cook, C.K. (2004). "Some sums related to sums of Oresme numbers", *Howard F. T. (eds.) Applications of Fibonacci Numbers, Proceedings of the Tenth International Research Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications, Kluwer Academic Publishers*, 87-99. (Springer, Dordrecht)

Çimen, C. B. ve İpek, A. (2016). "On Pell Quaternions and Pell-Lucas Quaternions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (1), 39–51.

Edson, M. ve Yayenie, O. (2009). “A New Generalization of Fibonacci Sequences and Extended Binet's Formula”, *Integers*, 9, 2-12.

Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. ve Ward, T. (2003). “Recurrence sequences”, *American Mathematical Society*, USA, 323 p.

Falcon, S. ve Plaza, A. (2007). “On the Fibonacci k−numbers”. *Chaos, Solitons & Fractals*, 32 (5), 1615–1624.

Gauss, C. F. (1832). “Theoria Residuorum Biquadraticorum”, *Commentatio Prima, Typis Dieterichchianis*.

Goy, T., Zatorsky, R. (2019). “On Oresme numbers and their connection with Fibonacci and Pell numbers”, *Fibonacci Quart.,* 57 (3), 238-245.

Halıcı, S. (2012). “On Fibonacci Quaternions”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 22 (2), 321–327.

Halıcı, S. ve Cerda-Morales, G. (2021). “On Quaternion-Gaussian Fibonacci Numbers and Their Properties”, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Seria Matematica*, 29 (1), 71–82.

Halıcı, S. (2021). "On quaternion-Gaussian Lucas numbers", *Mathematical Methods in the Applied Sciences,* 44 (9), 7601-7606.

Hamilton, W. R. (1843). “On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 2.

Hamilton, W. R. (1844). “On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra”, *Philosophical Magazine*, 25, 489–495.

Harman, C.J. (1981). “Complex Fibonacci Numbers”, *Fibonacci Quarterly,* 19 (1), 82-86.

Horadam, A. F. (1961). “A Generalized Fibonacci Sequence”, *American Math. Monthly,* 68 (5), 455-459.

Horadam, A. F. (1963). “Complex Fibonacci Numbers and Fibonacci Quaternions”, *The American Mathematical Monthly,* 70 (3), 289-291.

Horadam, A.F. (1965). “Basic Properties Of A Certain Generalized Sequence Of Numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 3 (3), 161-176.

Horadam, A.F. (1965). “Generating functions for powers of a certain generalized sequences of

numbers", *Duke Mathematical Journal*, 32 (3), 437–446.

Horadam, A.F. (1974). "Oresme numbers", *Fibonacci Quarterly*, 12 (3), 267-271.

Horadam, A.F. (1994). "Jacobsthal Representation Numbers", *The Fib. Quart*, 34, 40-54.

Iyer, M. R. (1969). "A Note on Fibonacci Quaternions", *The Fibonacci Quarterly*, 7 (3), 225–
229.

Jordan, J. H. (1965). "Gaussian Fibonacci and Lucas Numbers", *The Fibonacci Quarterly*, 3
(4), 315-318.

Kocer, E. G. ve Tuglu, N. (2007). "The Binet Formulas for the Pell and Pell-Lucas p−Numbers", *Ars Combinatoria*, 85, 3–17.

Koshy, T. (2001). "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications", *John Wiley & Sons, New*
York.

Lucas, E. (1878). "Theories des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques. (first edition)", *Western Hemisphere: American Journal of Mathematics*, 189-240.

Lucas, E. (1961). "Theorie des Nombres", *Blanchard, Paris*, 88-90.

Pethe, S., Horadam, A. F. (1986). "Generalized Gaussian Fibonacci Numbers", *Bull. Austral.*
Math. Soc., 33, 37-48.

Soykan, Y. (2021). "Generalized Oresme Numbers." *Earthline Journal of Mathematical Sciences*, 7 (2), 333-367.

Szynal-Liana, A. ve Wloch, I. (2016). "The Pell Quaternions and Octonions", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 26 (1), 435–440.

Vajda S. (1989). "Fibonacci and Lucas and The Golden Section", *Ellis Horwood Limited, Chichester, England*.

Vorobyov, N. (1976). "Elementary Numbers Theory", *Allyn and Bacon inc, Boston*, 285- 299.

Yaglom, I. M. (1968). "Complex Numbers in Geometry", *Academic Press, New York.*

Yılmaz, F., Ertaş, A. (2023). "On Quaternions With Gaussian Oresme Coefficients", *Turkish*
Journal Of Mathematics And Computer Science, 15 (1), 192-202.

Yılmaz, F., Özkan, M. (2022). “On the generalized Gaussian fibonacci numbers and Horadam
hybrid numbers: A unified approach”, *Axioms,* 11 (6), 255.

Zhang, F. (1997). “Quaternions and matrices of quaternions”, *Linear algebra and its applications,* 251, 21–57.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Ertaş, Aybüke

Uyruğu : T.C.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Üni.	Devam ediyor…
Lisans	Gazi Üniversitesi	21.06.2021
Lise	Etlik Sınav Anadolu Lisesi	16.06.2017

Yabancı Dil

İngilizce B2, Almanca A1

Uluslararası Bildiriler

1. 3rd International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE-2022), Sözlü Sunum, Bükreş, Romanya, 2022.

2. 4th International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE-2023), Sözlü Sunum, Madrid, İspanya, 2023.

Yayınlar

1. Ertaş, A., & Yılmaz, F. (2023). "On Quaternions With Gaussian Oresme Coefficients", *Turkish Journal Of Mathematics And Computer Scienc*e, 15(1), 192-202.

2. Yılmaz, F.; Ertaş, A.; Jia, J. (2023). "On Harmonic Complex Balancing Numbers", *Mathematics, 11,* 210.

3. Yılmaz, F., Ertaş, A., & Akbıyık, S. Y. (2023). "Determinants Of Circulant Matrices With Gaussian Nickel Fibonacci Numbers", *Filomat,* 37(25), 8683-8692.

4. Yılmaz, F., Arpacı, S., & Ertaş, A. (2024). "Some Results For Min Matrices Associated With Chebyshev Polynomials", *Logic Journal Of The Igpl*, Jzae028.

ankara HBM

