ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GAUSS LEONARDO KATSAYILARI VE HİBRİT SAYILARI ÜZERİNE

Nagihan KARA

Tez Danışmanı
Prof. Dr. Fatih YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

TEMMUZ 2023


ankara
İBM

GAUSS LEONARDO KATSAYILARI VE HİBRİT SAYILARI ÜZERİNE

Nagihan KARA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nagihan KARA

25.07.2023

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Programı Nagihan Kara öğrencisi tarafından hazırlanan Gauss Leonardo Katsayıları ve Hibrit Sayıları Üzerine Başlıklı tez çalışması 25/07/2023 tarih ve 10.30 saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS olarak **KABUL** edilmiştir.

	Kabul	**Ret**
Başkan (Unvan/Ad-Soyad/Kurum): **Dr. Öğr. Üyesi/ Jeta Alo/Beykent Üniversitesi**	X	
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum): **Doç. Dr. /Kadir Kanat/ Hacı Bayram Veli Üniversitesi**	X	
Üye (Unvan/Ad-Soyad/Kurum): **Prof. Dr./Fatih Yılmaz/Hacı Bayram Veli Üniversitesi**	X	

GAUSS LEONARDO KATSAYILARI VE HİBRİT SAYILARI ÜZERİNE

(Yüksek Lisans)

Nagihan KARA

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2023

ÖZET

Gauss Leonardo sayılarının; üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü, Cassini özdeşliğini ve bu sayıların matris gösterimini veriyoruz. Daha sonra Hibrit Gauss Leonardo sayılarının; üreteç fonksiyonunu ve Binet formülünü buluyoruz. Ayrıca bir tipteki Hessenberg matrislerinin permanentleri, Leonardo ve Gauss Leonardo Sayılarını veriyoruz**.**

Bilim Kodu :20401

Anahtar Kelimeler : Hibrit Gauss Leonardo Sayıları, Üreteç Fonksiyonu, Binet Formülü, Cassini Özdeşliği, Permanent, Hessenberg Matris

Sayfa Adedi : 43

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fatih YILMAZ

ON HYBRID NUMBERS WITH GAUSSIAN LEONARDO COEFFICIENTS

(M.Sc. Thesis)

Nagihan KARA

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY

THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

July 2023

ABSTRACT

We consider the Gaussian Leonardo numbers and investigate some of their amazing characteristic properties, including their generating function, the associated Binet formula and Cassini identity,and their matrix represention. Then, we define the hybrid Gaussian Leonardo numbers and obtain some of their particular properties.Furthermore,we define n n Hessenberg matrices whose permanents yield the Leonardo and Gaussian Leonardo sequences.

Science Code	:	20401
Key Words	:	Hybrid Gaussian Leonardo Numbers, Genereting Function, Binet Formula, Cassini İdentity, Permanent, Hessenberg Matrix
Page Number	:	43
Supervisor	:	Prof. Dr. Fatih YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
İÇİNDEKİLER vi
TABLOLARIN LİSTESİ viii
KISALTMALAR ix
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 5
2.1. Rekürans Bağıntısı 5
2.2. Fibonacci Dizisi 5
2.3. Lucas Dizisi 6
2.4. Karakteristik Denklemler 6
2.5. Binet Formülleri 6
2.6. Üreteç Fonksiyonu 7
2.7. Leonardo Sayıları 9
2.8. Binet Formülü 9
2.9. Catalan Özdeşliği 10
2.10. Cassini's Özdeşliği 10
2.11. D'Ocagne's Özdeşliği 10
2.12. Üreteç Fonksiyonu 10
2.13. Bilinen Bazı Sayı Dizileri 11
2.14. Kuaterniyonlar (Dördeyler) 12
2.15. Hibrit Sayılar 13
2.16. Horadam Hibrit Sayıları 14
2.17. Gauss Sayıları 15

Sayfa

3. GAUSS LEONARDO SAYILARI 19
3.1. Üreteç Fonksiyonu 19
3.1.1. İspat 20
3.2. Binet Formülü 20
3.2.1. İspat 21
3.3. Gauss Leonardo Sayıları için Cassini Formülü 23
3.3.1. İspat 23
3.4. Gauss Leonardo Dizisinin Matris Gösterimi 24
3.4.1. Teorem 26
3.4.2. İspat 26
3.4.3. Teorem 26
3.4.4. İspat 26
3.5. Hibrit Gauss Leonardo Sayıları 27
3.6. Hibrit Gauss Leonardo Sayılarının Üreteç Fonksiyonu: 29
3.7. Hibrit Gauss Leonardo Sayısı Binet Formülü 30
3.7.1. İspat 31
3.8. Determinant 32
3.9. Permanent 33
3.10. Bir Tipteki Hessenberg Matrislerinin Permanentleri ve Leonardo ve Gauss Leonardo Sayıları 35
3.10.1. Teorem 36
3.10.2. İspat 36
3.10.3. Teorem 37
4. SONUÇ 39
KAYNAKLAR 41
ÖZGEÇMİŞ 43

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

Tablo 2.1. Fibonacci Sayıları 5
Tablo 2.2. Leonardo Sayıları 9
Tablo 2.3. Kuaterniyon Çarpımı 12
Tablo 2.4. Hibrit Sayıların Çarpımı 14
Tablo 2.5. Gauss Fibonacci Sayıları 16
Tablo 2.6. Gauss Lucas Sayıları 16
Tablo 2.7. Gauss Pell Sayıları 16
Tablo 2.8. Gauss Pell Lucas Sayıları 16
Tablo 2.9. Gauss Jacobsthal Sayıları 17
Tablo 2.10. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayıları 17
Tablo 3.1. Gauss Leonardo Sayıları 19
Tablo 3.2. Hibrit Gauss Leonardo Sayıları 29

KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Kısaltmalar	Açıklamalar
C_n	n. Lucas Kuaterniyonu
E_n	n. Pell Sayısı
F_n	n. Fibonacci Sayısı
FH_n	n. Fibonacci Hibrit Sayısı
GF_n	n. Gauss Fibonacci Sayısı
GL_n	n. Gauss Leonardo Sayısı
Gl_n	n. Gauss Lucas Sayısı
Gj_n	n. Gauss Jacobsthal Sayısı
Gp_n	n. Gauss Pell Sayısı
$G\vartheta_n$	n. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayısı
Gq_n	n. Gauss Pell-Lucas Sayısı
JH_n	n. Jacobsthal Hibrit Sayısı
H_n	n. Horadam Hibrit Sayısı
HGL_n	n. Gauss Leonardo Hibrit Sayısı
Le_n	n. Leonardo Sayısı
LH_n	n. Lucas Hibrit Sayısı
L_n	n. Lucas Sayısı
J_n	n. Jacobsthal Sayısı
j_n	n. Jacobsthal-Lucas Sayısı
p_n	n. Padovan Sayısı
PH_n	n. Pell Hibrit Sayısı
R_n	n. Perrin Sayısı
ZH_n	n. Pell-Lucas Hibrit Sayısı
Z_n	n. Pell-Lucas Sayısı
Q_n	n. Fibonacci Kuaterniyon

1. GİRİŞ

Matematik biliminin kalbi sayılar sistemidir. İlk çağlarda insanların günlük ihtiyaçlarını karşılamak için ağaç gövdelerine ve yaşamlarını sürdürdükleri mağara duvarlarına çentikler atarak sayıları kullandıkları bilinmektedir. Bu bilgiden hareketle insanlık tarihinin başından itibaren sayıların kullanıldığı anlaşılmaktadır. Sayılar; ticaret sisteminin gelişmesi, borç kavramının ortaya çıkması ve insanların gelişmiş tarih hesaplamaları yapmak gibi istekleri karşısında yetersiz kalmıştır. İnsanlar artan ihtiyaçlar doğrultusunda uzun süre araştırma yapmışlar, çeşitli doğa olaylarını gözlemlemişler ve bu bilimsel çalışmalar sonucunda da yeni sayı sistemleri geliştirmişlerdir.

Gelişen ticaret sistemi ve buna bağlı olarak ortaya çıkan borç kavramının matematiksel olarak ifade edilebilmesi ihtiyacı 'negatif sayılar' ın keşfi ile sonuçlanmıştır. Negatif sayıların Çin' de M.Ö. 2. Yüzyılda kullanılmaya başlandığı bilinmektedir. Buna karşın Avrupa' da ise negatif sayılar 16. Yüzyılda kullanılmaya başlanmıştır. İnsanlar, 3 elmadan 5 elma çıkar mı sorusunun gözle görülememesi ve somut olmaması nedeniyle; negatif sayıları uzun yıllar sonra kabul edebilmişlerdir. Yani sayı sistemlerinin keşfi, kullanılmaya başlanması insanların ihtiyaçlarına ve çalışmalarına bağlı olarak; coğrafi bölgelere göre tarihsel değişim göstermektedir.

İkinci dereceden denklemler üzerinde çalışan birçok Matematik Bilimci hiçbir sayının karesinin negatif olamayacağı kanısına varmıştır. Örneğin $x^2 + 1 = 0$ denkleminin çözümünde $x^2 = -1$ ve $x = \sqrt{-1}$ elde edilir. Bu sonuca ulaşan matematikçiler çözümün olmadığına karar verdiler ve bu kanı uzun yıllar boyunca kabul gördü. Karesi negatif olan sayılar için 'imaginery' terimini kullanan Rene Descartes, negatif bir sayının karekökünün 'sanal' olduğunu ifade etmiştir. Leonhard Euler sanal olarak nitelendirilen bu sayılar için $i = \sqrt{-1}$ kavramlaştırmasını kullanmıştır. Gauss ise bu sayılar için 'kompleks sayılar' ifadesini kullanmış ve bu kullanım evrensel düzeyde kabul görmüştür. Uzun yıllar boyunca süren çalışmaların ardından Gauss tarafından yapılan tanımlama ile geliştirilen kompleks sayıların tarihsel geçmişi bu şekildedir.

Kompleks sayılardan sonra da sayı sistemi gelişmeye devam etmiştir. William R. Hamilton önce kompleks sayıları (x, y) koordinatları ile göstermiştir, bu gösterimin ışığında kompleks sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri yapılmıştır.

Günümüzde üç boyutlu uzayda dönme hareketleri, uzay kinematiği, mekanik kuramlar ve kuantum fiziği gibi farklı disiplinlerde kullanılan ‘Kuaterniyonlar’ (Dördeyler), kompleks sayılar üzerinde çalışmalar yapan Hamilton tarafından eşiyle birlikte Brougham köprüsünde yürürken 1843 yılında bulunmuştur.

Gerçel sayılar kümesinin elemanı olmayan ve karesi 1 olan sayının kümeye katılması ile oluşturulan sayı sistemine ‘hiperbolik sayılar’ denilmiştir. Hiperbolik sayılar da karmaşık sayılar gibi $a + hb$ şeklinde yazılabilmektedir. Karmaşık sayılardan tek farkı ‘hiperbolik birim’ denilen sayının $h^2 = 1$ olarak tanımlanmasıdır. Hiperbolik sayılar özellikle fizik alanında kullanılmaktadır.

Her alanda olduğu gibi bilime sunulan katkı ve yeni buluşlar matematik alanında da sürekli devam etmiştir. Karesi negatif olan sayıların tanımı, kuaterniyonların ve hiperbolik sayıların keşfi gibi gelişmelerden sonra da bilim insanları karesi sıfır olan ancak kendisi sıfırdan farklı olan sayının varlığı, tanımı üzerine çalışmalar yapmışlardır. William Kingdon Clifford tarafından 1873 yılında geliştirilen ‘Dual Sayılar’ sisteminde, sıfırdan farklı fakat karesi sıfır olan sayı tanımlanarak bu çalışma da çözüme kavuşturulmuştur. Dual sayılar, klasik vida mekaniği ve kuantum mekaniği gibi farklı disiplinlerde kullanılmaktadır.

Mustafa Özdemir’ in 2018 yılında; Reel sayılar, Gauss tarafından tanımlanan kompleks sayılar, Clifford tarafından keşfedilen dual sayılar ve son olarak hiperbolik sayılar kümesini birleştirmesi ile ‘hibrit sayılar’ adı altında yeni bir sayı sistemi tanımlanmıştır. Özdemir bu sayı sistemi ile sayıların cebirsel ve geometrik özelliklerini incelemiştir.

Bu kısma kadar sayı sistemlerinin tarihsel gelişiminden kısaca bahsedildi. Bu tezin asıl konusu ‘Hibrit Gauss Leonardo Sayıları’ dır. Şimdide Hibrit Gauss Leonardo Sayıları’ nın temelini oluşturan ünlü matematikçi Fibonacci’ nin çalışmalarından bahsedeceğiz.

İtalyan matematikçi Fibonacci, matematik eğitimini Cezayir ve Kuzey Afrika’ da Arap hocalardan almıştır. Buralarda aldığı dersler sonucu öğrendiği bilgileri (Hint- Arap Sayılarını) Avrupa’ ya aktarmıştır. Bu durum matematik tarihinde, Fibonacci’ nin matematiği Araplardan alıp Avrupa’ ya tanıtan kişi olarak olarak anılmasına neden olmuştur. Ortaçağ’ ın en önemli matematik eserlerinden biri olarak kabul edilen Liber Abaci isimli kitabı Fibonacci yazmıştır. Hesaplama ve ondalık sayı sisteminde

aritmetik işlem yapma konularını içeren kitapta ayrıca Altın Oran ve Fibonacci Dizisi' ne yer vermiştir.

Fibonacci bu eserinde tam sayı ve kesirlerde dört işlemin nasıl uygulanacağını, sayıların okunması ile yazılmasının nasıl olacağını anlatmıştır. (Koshy 2001; Grigas 2013).

Kitapta yer alan ve Fibonacci Dizisi' nin keşfi ile sonuçlanan tavşan problemi yeni sayı sistemlerinin en temel noktalarından biri olmuştur. Söz konusu problem şu şekildedir:

Kapalı ortamda bulunan bir çift tavşan, her ay yeni bir çift tavşan doğuracaktır. Yeni doğan çift bir ay sürede doğurgan hale gelecek ve yeni bir çift tavşan doğuracaktır. Tavşanların hiç ölmeyeceği, her doğan çiftin bir erkek, bir dişiden oluşacağı ve her çiftin 100 aylık süre boyunca doğurganlığa devam edeceği varsayımıyla 100 ay sonunda kaç tane tavşan olacaktır? Bu sorunun cevabı 1,1,2,3,5, … dizilimi olmuştur. Bu dizilime Fibonacci Dizisi adı verilmiştir. Doğadaki çam kozalağı ve ay çiçeği dizilimleri gibi birçok dizilim Fibonacci Dizisi' ne örnek teşkil etmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Rekürans Bağıntısı

Matematikte dizideki herhangi bir terimin, kendisinden önceki terimlerden yararlanılarak ifade edilmesi mümkündür. Bu şekilde oluşan bağıntıya ise tekrarlama (rekürans) bağıntısı denir.

$a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_n,..sonsuz\ bir\ dizi$, $k \in \mathbb{N}$ sabit ve $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere ve $\forall\ n \geq k$ için

$a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2},a_{n-3},\dots,a_{n-k})$ (1)

Fonksiyonuna k. mertebeden indirgeme(rekürans) bağıntısı denir, Dizinin bütün elemanlarını (1) denklemi ve $a_0,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k-1}$ başlangıç değerleri ile belirlenir. (Koshy,2001)

En iyi bilinen rekürans bağıntılarından biri Fibonacci dizisidir. Ardışık iki terimin toplamı bir sonraki terimi verecek şekilde tanımlanmıştır. Şimdi Fibonacci ve Lucas dizilerinin rekürans bağıntısı, Binet formülü, karakteristik denklemi ve bazı özellikleri incelenecektir.

2.2. Fibonacci Dizisi

F_0= 0, F_1= 1 başlangıç koşullarında ve her n≥ 2 için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ tekrarlama bağıntısına sahip olan (F_n) dizisi, Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Burada $F_n$sayısına n. Fibonacci sayısı denir. (Koshy 2001)

Fibonacci dizisinin aldığı bazı değerler aşağıdaki Tablo 2.1 ile sunulmuştur.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21

Tablo 2.1. Fibonacci Sayıları

Ardışık iki Fibonacci sayısının oranı literatürde altın oran olarak bilinmektedir. Örneğin; Dizi $F_4\ için\ 3$, $F_5\ için\ 5$ değerini almaktadır. Bu iki değerinin birbirine oranı F_5/F_4 =1,666667 olup altın oran sayısına yakınsamadır.

2.3. Lucas Dizisi

$L_0 = 2, L_1 = 1$ başlangıç koşullarındaki ve n≥ 2 için $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ şeklindeki rekürans bağıntısı Lucas dizisi olarak adlandırılır. Buradaki L_n sayısı ise n. Lucas sayısı olarak ifade edilmiştir. Lucas dizisi 1878 yılında Francois Edouard Anatole Lucas tarafından tanımlanmıştır. Bu dizi bilimsel çalışma alanlarında kullanıldığı gibi uygulama alanlarında da kullanılmaktadır. Lucas dizisi de tıpkı Fibonacci dizisi gibi literatürde altın oranı sağlayan sayılar arasına dahil edilmektedir.

2.4. Karakteristik Denklemler

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ rekürans bağıntısı olsun. Bu durumda rekürans bağıntısının karakteristik denklemi

$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$

bu denklemin kökleri $\alpha \; ve \; \beta$ olmak üzere genel çözümü

$a_n = c\alpha^n$+d dir.

Bu denklemde c ve d sabit sayılardır. (Koshy,2001)

Yukarıda Fibonacci dizisinin elemanlarının oranının literatürde altın oran $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ olarak geçtiği belirtilmişti. Bu oran Fibonacci ve Lucas dizisinin karakteristik denkleminin çözüm kümesinin elemanıdır. Bu diziler rekürans bağıntılarından dolayı aynı karakteristik denkleme sahiptirler. Bu denklem C(x)=$x^2 - x - 1$ biçimindedir. Bu denklemin çözüm kümesinin elemanları $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $\alpha + \beta = 1 \; ve \; \alpha\beta = -1$ eşitlikleri sağlanır.

2.5. Binet Formülleri

Binet formülleri, Fibonacci sayılarıyla ilgili pek çok özdeşliği türetmemizi ve ispatlamamızı sağlamıştır. Bu formüller, Fibonacci sayılarının rekürans bağıntılarının kullanılmasıyla ortaya çıkmıştır. İlk olarak De Moivre (1718) tarafından geliştirilen formüller, Jacques- Philippe-Marie Binet (1786-1856) tarafından ispatlanmıştır. Binet formüllerinin bize sağladığı kolaylık, Fibonacci dizisinde; her terimi kendinden önceki iki terimin toplamı olarak yazarak istediğimiz n. Fibonacci sayısını bulmak yerine, rekürans bağıntısıyla direkt olarak bulmamızdır.

∀ n ∈N için biçimindeki gösterime $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$ F_n ve L_n dizilerinin Binet formülü denir.

Ayrıca Binet formülleri kullanılarak Fibonacci ve Lucas dizilerine ait pek çok özdeşliğin ispatı yapılabilir. n. Fibonacci ve n. Lucas sayısını elde etmek için kullanılan Binet formülleri şu şekildedir:

$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $L_n = \alpha^n + \beta^n$

2.6. Üreteç Fonksiyonu

Bir dizinin elemanlarının kullanılması sonucu elde edilen kuvvet serisine üreteç fonksiyonu adı verilir. Üreteç fonksiyonu da tıpkı Binet formülü gibi dizinin istenen belirli elemanını elde etmek için kullanılabilir. Lineer denklem sistemlerinde de kullanılan üreteç fonksiyonları, 1718 yılında Abraham De Moivre tarafından Fibonacci dizisinin rekürans bağıntılarını çözmek için geliştirilmiştir.

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ reel sayılar olmak üzere g(x)= $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \ldots$ fonksiyonu $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır. Aynı zamanda üreteç fonksiyonu $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sonlu dizisi için de g(x)= $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ şeklinde ifade edilir.

$$\frac{x^{n-1}}{x-1} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} dir.$$

F(x)=$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ve g(x)=$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ iki üreteç fonksiyonu olmak üzere n≥0 için;

$$a_n = b_n$$

ise bu üreteç fonksiyonları eşittir.

Şimdi de Fibonacci ve Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonlarından bahsedilecektir.

Fibonacci ve Lucas dizileri, başlangıç değerleri dışında aynı üreteç fonksiyonuna sahiptir.

$$F(t) = \frac{F_0 + (F_1 - F_0)t}{t^2 - t - 1}$$

ve

$$L(t) = \frac{L_0 + (L_1 - L_0)t}{t^2 - t - 1}$$

Fibonacci ve Lucas sayılarının;

- $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
- $\sum_{i=1}^{n} {F_i}^3 = \frac{{F^3}_{n+2} - 3{F^3}_{n+1} + 3(-1)^n F_n + 2}{4}$
- $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i F_{i+2} = F_{2n+1} F_{2n+2} - 1$
- $(F_{n-1}F_{n+2})^2 + (2F_nF_{n+1})^2 = (F_{n+1}F_{n+2} - F_{n-1}F_n)^2$
- $F_n + L_n = 2F_{n+1}$
- $\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + \binom{n-4}{4} + \ldots = F_n$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n}$
- $2F_n = F_{n+1} + F_{n-2}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$
- $F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = F_m L_n$
- $q^n {F_0}^2 + q^{n-1} {F_1}^2 + q^{n-2} {F_2}^2 + \ldots + q {F_{n-1}}^2 + {F_n}^2 = \frac{F_n F_{n+1}}{p}$
- ${F_{n+1}}^2 + {F_n}^2 = F_{2n+1}$
- $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$
- $F_n L_m + F_m L_n = 2F_{n+m}$
- ${F_{n+1}}^2 - {F_n}^2 = F_{n+2}$
- $\sum_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 3$
- $F_{n+m} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$
- $F_{2n} = F_{n-1}F_n + F_n F_{n+1} = L_n F_n$
- $\sum_{i=1}^{n} L_{2i} = L_{2n+1} - 1$
- $F_{n+1}L_{n+1} - F_n L_n = F_{2n+1}$
- $\sum_{i=1}^{2n} F_i F_{i+1} = {F^2}_{2n+1} - 1$
- ${F_n}^2 - 3{F_{n-1}}^2 + {F_{n-2}}^2 = 2(-1)^{n+1}$
- $F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m} = F_m L_n$
- $q^n {F_0}^2 + q^{n-1} {F_1}^2 + q^{n-2} {F_2}^2 + \ldots + q {F_{n-1}}^2 + {F_n}^2 = \frac{F_n F_{n+1}}{p}$

  ve daha birçok özelliği vardır.

Tezin temelini Leonardo sayıları oluşturuyor. Şimdi Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı, üreteç fonksiyonu, Binet formülü, Catalan, Cassini's, D'Ocagne's özdeşliği incelenir.

2.7. Leonardo Sayıları

Le_n n. Leonardo sayısını tanımlamak üzere Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı Le_n=$Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1,\ n \geq 2$ başlangıç koşulları ile $Le_0 = Le_1 = 1$ bu şekilde verilmiştir.

Leonardo sayılarının aldığı bazı değerler aşağıdaki Tablo 2.2 ile sunulmuştur.

Le_0	Le_1	Le_2	Le_3	Le_4	Le_5	Le_6	Le_7	Le_8	Le_9
1	1	3	5	9	15	25	41	67	109

Tablo 2.2. Leonardo Sayıları

Le_n-$Le_{n+1} = Le_{n-2} - Le_n$ yerine yazılırsa rekürans bağıntısı şu şekilde de yazılabilir:
Le_{n+1}=$2Le_n - Le_{n-2}\ \ n \geq 2$

Leonardo sayılarını, Leonardo sayıları için Binet formülünü ve bu sayıların Fibonacci dizisi ile olan ilişkisini Catarino ve Borges incelemiştir.

Leonardo sayıları ve Fibonacci dizisi arasındaki ilişki şu şekilde ifade edilir:

$n \geq 0$ için $Le_n = 2F_{n+1} - 1$

eşitliğinin tümevarımla gösterilebilir. Bu bağlamda $n = 0$ ve $n = 1$ için eşitlik doğru olduğu açıktır. Bu ifadenin $1 < k < n$ için doğru olduğunu kabul edelim ve eşitlik $n = k + 1$ için de doğru mu bakalım.

Le_{n+1}=$Le_n + Le_{n-1} + 1$=$(2F_{n+1} - 1) + (2F_n - 1) + 1$

$=2(F_{n+1} + F_n) - 1 = 2F_{n+2} - 1$

dır. Dolayısıyla Fibonacci sayıları ve Leonardo sayıları arasında yukarıdaki gibi bir eşitlik ifade edilebilir. Şimdi Fibonacci dizisini kullanılarak Leonardo sayıları için Binet formülü yazılır.

2.8. Binet Formülü

Le_n n. Leonardo sayısı olmak üzere

$$Le_n = 2(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}) - 1 = \frac{\alpha(2\alpha^n - 1) - \beta(2\beta^n - 1)}{\alpha - \beta}$$

burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Birçok matematikçi Fibonacci dizisi üzerine çalışma yapmıştır. Bu isimlerden biri olan İtalyan matematikçi Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) kendi adıyla anılan özdeşliği bulmuştur. Daha sonra bu özdeşliğin daha genel biçimi Eugene Catalan (1814-1894) tarafından tanımlanmıştır.

2.9. Catalan Özdeşliği

$n > r$ için, $r \geq 1$,

$(Le_n)^2 - Le_{n-r}Le_{n+r} = Le_{n-r} + Le_{n+r}$-$2Le_n - (-1)^{n-r}(Le_{r-1} + 1)^2$

Leonardo sayıları için Catalan özdeşliği bu şekildedir. $n \geq 0$ için $Le_n = 2F_{n+1} - 1$ bu eşitlikten faydalanılarak ispat yapılabilir.

2.10. Cassini's Özdeşliği

$n > 2$ için

$(Le_n)^2 - Le_{n-1}Le_{n+1} = Le_{n-1} - Le_{n-2}$+$4(-1)^n$.

Yukarıda verilen Leonardo dizisinin Catalan özdeşliğinde de r=1 yazılırsa Cassini özdeşliği elde edilir. $Le_0 = 1$ alınarak Cassini özdeşliği elde edilir.

$(Le_n)^2 - Le_{n-1}Le_{n+1} = Le_{n-1} + Le_{n+1}$-$2Le_n - (-1)^{n-1}(Le_0 + 1)^2$

2.11. D'Ocagne's Özdeşliği

Eğer $m > n$, $n \geq 1$

$Le_mLe_{n+1} - Le_{m+1}Le_n = 2(-1)^{n+1}(Le_{m-n-1} + 1) + Le_{m-1}$-$Le_{n-1}$.

Leonardo sayıları için D'ocagne's özdeşliği bu şekildedir. $n \geq 0$ için $Le_n = 2F_{n+1} - 1$ bu eşitlikten faydalanarak ispat yapılır.

2.12. Üreteç Fonksiyonu

Leonardo sayıları için üreteç fonksiyonu şu şekilde verilir;

$$gLe(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Le_n t^n$$

Ve bu fonksiyondan aşağıdaki özdeşlik elde edilir.

$$\mathrm{gLe(t)} = \frac{1 - t + t^2}{1 - 2t + t^3}$$

yukarıdaki özdeşliği, Leonardo dizisinin başlangıç koşulu ve $Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}$ bağıntısı dikkate alındığında

$$\mathrm{gLe(t)} = Le_0 + Le_1 t + Le_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} Le_n t^n$$

bu eşitlik elde edilir.

Bu kısma kadar Fibonacci, Lucas ve Leonardo sayı dizilerinin rekürans bağıntısından, üreteç fonksiyonundan, Binet formüllerinden ve Fibonacci ve Lucas sayı dizilerinin bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Şimdi diğer bazı sayı dizilerinin tanımları incelenecektir.

2.13. Bilinen Bazı Sayı Dizileri

Pell, Pell-Lucas dizileri Horadam tarafından 1994 yılında tanımlanmıştır. Ardışık iki pell sayısının oranı literatürde gümüş oran olarak bilinmektedir.

$n > 2$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $E_0 = 0 \; ve \; E_1 = 1 \; olmak$ üzere $E_n = 2E_{n-1} + E_{n-2}$ Pell dizisidir.

$n > 2$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $Z_0 = 0 \; ve \; Z_1 = 2 \; olmak$ üzere $Z_n = 2Z_{n-1} + Z_{n-2}$ Pell-Lucas dizisidir

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas dizileri Cerin tarafından 2007 de tanımlanmıştır.

$n \geq 1$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $J_0 = 0 \; ve \; J_1 = 1 \; olmak$ üzere

$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$ Jacobsthal dizisidir.

$n \geq 1$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $j_0 = 2 \; ve \; j_1 = 1 \; olmak$ üzere $j_n = j_{n+1} + 2j_n$ Jacobsthal-Lucas dizisidir.

Perrin sayı dizisi de Shannon tarafından 2006 yılında tanımlanmıştır. Perrin dizisindeki ardışık sayıların oranı literatürde plastik oran olarak geçmektedir.

$n > 2$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $R_0 = 3 \; R_1 = 0 \; R_2 = 2$ olmak üzere

$R_n = R_{n-2} + R_{n-3}$ Perrin sayı dizidir.

Padovan sayıları Richard Padovan adına Stewart tarafından 1996 yılında tanımlanmıştır.

Padovan dizisindeki ardışık sayıların oranı da literatürde plastik oran olarak geçmektedir.

$n > 2$ olmak şartıyla başlangıç koşulları; $p_0 = p_1 = p_2 = 1$ olmak üzere

$p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ Padovan sayı dizidir.

2.14. Kuaterniyonlar (Dördeyler)

Kuaterniyonların tarihsel gelişiminden giriş kısmında bahsedilmişti. Şimdi matematiksel gösterimine ve bazı özelliklerine bakılacaktır.

Kuaterniyon $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ ve $i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k = -ki, jk = i = -kj, ki = j = -i$ olmak üzere $n = x + yi + zj + tk$ formunda yazılabilen kompleks sayılara kuaterniyon denir.

Burada $1, i, j, k$ katsayıları kuaterniyonun tabanıdır.

$$x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$n_1 = x_1 + y_1 i + z_1 j + t_1 k \; ve \; n_2 = x_2 + y_2 i + z_2 j + t_2 k$$

İki kuaterniyon olmak üzere kuaterniyonlar da toplama işlemi

$n_1 + n_2 = (x_1 + y_1 i + z_1 j + t_1 k) + (x_2 + y_2 i + z_2 j + t_2 k)$

$n_1 + n_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i + (z_1 + z_2)j + (t_1 + t_2)k$ bu şekildedir.

Bu iki kuaterniyonun çarpma işlemi aşağıda verilmiştir.

$n_1 . n_2 = (x_1 + y_1 i + z_1 j + t_1 k).(x_2 + y_2 i + z_2 j + t_2 k)$

$n_1 . n_2 = (x_1 . x_2 - y_1 . y_2 - z_1 . z_2 - t_1 . t_2) + i(x_1 . y_2 + y_1 . x_2 + z_1 . t_2 - t_1 . z_2) + j(x_1 . z_2 + z_2 . x_1 + y_1 . t_2 - t_1 . y_2) + k(x_1 . t_2 + t_1 . x_2 + y_1 . z_2 - z_1 . y_2)$

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	İ	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Tablo 2.3. Kuaterniyon Çarpımı

$n = x + yi + zj + tk$ kuaterniyonun eşleniği $\bar{n} = x - yi - zj - tk$ 'dır.

$n = x + yi + zj + tk$ kuaterniyonunun normu N(n)=‖ n ‖ biçiminde gösterilir.

N(n)=‖ n ‖=$\sqrt{n\bar{n}}$=$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$ eşitliği sağlanır.

Ayrıca kuaterniyonlardaki reel katsayıların yerine Fibonacci ve Lucas sayıları yazılarak Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları tanımlamıştır. Bu tanımı ilk kez ortaya çıkaran ünlü matematik bilimci Horadam'dır. Daha sonra birçok matematikçi tarafından Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları üzerine çeşitli genelleştirmeler yapılmış ve özellikler elde edilmiştir.

Fibonacci sayı dizilerinden oluşan n. Fibonacci kuaterniyonu ve n. Lucas kuaterniyonu

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}$$

$$C_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3}$$

bu şekildedir.

2.15. Hibrit Sayılar

Mustafa Özdemir tarafından 2018 senesinde tanımlanan $\mathcal{M} = \{a + \mathcal{b}i + c\mathcal{E} + dh: a, \mathcal{b}, c, d \in \mathbb{R}\ i^2 = -1, \mathcal{E}^2 = 0, h^2 = 1, \mathcal{E} + i = -hi = ih\}$ $\mathcal{M}$ hibrit sayısını inceleyelim. Burada a katsayısı reel, i katsayısı kompleks, $\mathcal{E}$ katsayısı dual ve h katsayısı ise hiperbolik birimdir.

1= (1,0,0,0), $i = (0,1,0,0)$, $\mathcal{E} = (0,0,1,0)$, $h = (0,0,0,1)$

Hibrit birimler bu şekildedir.

$\mathcal{M} = a + \mathcal{b}i + c\mathcal{E} + dh$ bu hibrit sayısının reel sayı kısmı a , vektörel kısmı $\mathcal{b}i + c\mathcal{E} + dh$ 'dır.

$\mathcal{M}_1 = a_1 + \mathcal{b}_1 i + c_1\mathcal{E} + d_1 h$ ve $\mathcal{M}_2 = a_2 + \mathcal{b}_2 i + c_2\mathcal{E} + d_2 h$ iki tane hibrit sayısıdır.

$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ eşitliği için $a_1 = a_2$, $\mathcal{b}_1 = \mathcal{b}_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ şeklinde tanımlanır.

Hibrit sayılarda toplama ve çarpma işlemi şu şekildedir.

$\mathcal{M}_1 = a_1 + \mathcal{b}_1 i + c_1\mathcal{E} + d_1 h$ ve $\mathcal{M}_2 = a_2 + \mathcal{b}_2 i + c_2\mathcal{E} + d_2 h$ iki tane hibrit sayısı olmak üzere;

$\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = (a_1 + a_1) + (\mathcal{b}_1 + \mathcal{b}_2)i + (c_1 + c_2)\mathcal{E} + (d_1 + d_2)h$

$\mathcal{M}_1 . \mathcal{M}_2 = (a_1 + \mathcal{b}_1 i + c_1\mathcal{E} + d_1 h) . (a_2 + \mathcal{b}_2 i + c_2\mathcal{E} + d_2 h)$

Aşağıdaki tabloda hibrit sayıların çarpma işlemi verilmiştir. Hibrit sayılar birleşme özelliğine sahiptir. Değişme özelliğine sahip değildir. Değişme özelliğinin var olmadığı Tablo 2.4 üzerinden açıkça görülebilir.

×	1	i	$\mathcal{E}$	h
1	1	i	$\mathcal{E}$	h
i	i	-1	1-h	$\mathcal{E}+i$
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E}$	$h+1$	0	$-\mathcal{E}$
h	h	$-\mathcal{E}-i$	$\mathcal{E}$	1

Tablo 2.4. Hibrit Sayıların Çarpımı

$\mathcal{M}=a+\mathcal{b}i+c\mathcal{E}+dh$ hibrit sayısı olmak üzere eşleniği $\overline{\mathcal{M}}=a-\mathcal{b}i-c\mathcal{E}-dh$ bu şekildedir.

$\mathcal{M}$ hibrit sayısının karakteri C($\mathcal{M}$) ile gösterilir ve C($\mathcal{M}$)=$a^2+(\mathcal{b}-c)^2-d^2$ ile ile hesaplanır. $\mathcal{M}$ hibrit sayısının normu $\sqrt{\| \mathrm{C}(\mathcal{M}) \|}$ denir.

$\| n \|=\sqrt{\| \mathcal{M}\overline{\mathcal{M}} \|}=\sqrt{\| \mathrm{C}(\mathcal{M}) \|}=\sqrt{\| a^2+(\mathcal{b}-c)^2-d^2 \|}$

Hibrit sayıların reel, kompleks, dual ve hiperbolik sayıların birleşimi olduğunu 2018 yılında Mustafa Özdemir'in bu şekilde tanımladığı yukarıda bahsedilmişti. Şimdi bu hibrit birimlerinin önündeki reel katsayılar yerine kullanılarak elde edilen hibrit katsayılı sayıları incelenecektir.

2.16. Horadam Hibrit Sayıları

A. Szynal-Liana 2018 yılında Horadam Hibrit sayısını tanımladı.

n. Horadam hibrit sayısı H_n olsun.

$$H_n = W_n + iW_{n-1} + \varepsilon W_{n-2} + hW_{n-3}$$

W_n 'nin özel değerleri için şu tanımları elde edilmiş:

A. Szynal-Liana; Fibonacci Hibrit sayılarını tanımladı.

n. Fibonacci hibrit sayısı FH_n olsun.

$$FH_n=F_n + iF_{n+1} + \varepsilon F_{n+2} + hF_{n+3}$$

$FH_0 = i + \varepsilon + 2h$ $\quad$ F$H_1 = 1 + i + 2\varepsilon + 3h$ $\quad$ $FH_2 = 1 + 2i + 3\varepsilon + 5h$

n. Pell hibrit sayısı P$H_n$olsun.

$$PH_n=E_n + iE_{n+1} + \varepsilon E_{n+2} + hE_{n+3}$$

$PH_0 = i + 2\varepsilon + 5h$ $\quad$ $PH_1 = 1 + 2i + 5\varepsilon + 12h$ $\quad$ P$H_2 = 2 + 5i + 12\varepsilon + 29h$

n. Jacobsthal hibrit sayısı JH_nolsun.

$$JH_n=J_n + iJ_{n+1} + \varepsilon J_{n+2} + hJ_{n+3}$$

$JH_0 = i + \varepsilon + 3h$ $\quad$ $JH_1 = 1 + i + 3\varepsilon + 5h$ $\quad$ $JH_2 = 1 + 3i + 5\varepsilon + 11h$

Aynı şekilde n. Lucas hibrit sayısını LH_n olsun.

$$LH_n=L_n + iL_{n+1} + \varepsilon L_{n+2} + hL_{n+3}$$

n. Pell-Lucas hibrit sayısını ZH_n olsun.

$$ZH_n=Z_n + iZ_{n+1} + \varepsilon Z_{n+2} + hZ_{n+3}$$

n. Jacobsthal-Lucas hibrit sayısını jH_n olsun. Jacobsthal-Lucas hibrit sayısının katsayıları yerine Jacobsthal-Lucas sayıları yazılarak tanımlanır.

$$jH_n=j_n + ij_{n+1} + \varepsilon j_{n+2} + hj_{n+3}$$

2.17. Gauss Sayıları

$i = \sqrt{(-1)}$ ve a, b ϵ $\mathbb{Z}$ olmak üzere $z = a + bi$ şeklinde tanımlı kompleks sayılara Gauss sayıları adı verilmiştir.

Gauss sayılarında a, b ϵ $\mathbb{Z}$ olmak üzere a, b katsayılarının yerine Fibonacci sayıları yazıldığında elde edilen sayılar, Gauss Fibonacci sayıları olarak tanımlanmıştır. Bu tanım Horadam ve Berzsenyi tarafından yapılmıştır.

Gauss Fibonacci sayılarında: n≥ 0 için GF_n tanımlanmıştır.

GF_n= $F_{n-1} + iF_{n-2}$

Denklemi için başlangıç koşulları G$F_0 = i$, GF_1=1 dir.

Bazı Gauss Fibonacci sayıları aşağıda Tablo 2.5' te verilmiştir.

GF_0	GF_1	GF_2	GF_3	GF_4	GF_5
1	1+ i	i +2	2i +3	3i+5	5 i +8

Tablo 2.5. Gauss Fibonacci Sayıları

Gauss Lucas sayıları: n≥ 2 için Gl_n tanımlanmıştır. G$l_0 = 2 - i$,G$l_1 = 1 + 2i$ olmak üzere G$l_n = l_n + i\, l_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Lucas sayıları aşağıda Tablo 2.6' da verilmiştir.

Gl_0	Gl_1	Gl_2	Gl_3	Gl_4	Gl_5
1+2i	3+i	4+3i	7+4i	11+7i	18+11i

Tablo 2.6. Gauss Lucas Sayıları

Gauss Pell sayıları: n≥ 2 için Gp_n tanımlanmıştır. G$p_0 = i$,G$p_1 = 1$ olmak üzere G$p_n = p_n + ip_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Pell sayıları aşağıdaki Tablo 2.7' de verilmiştir.

Gp_0	Gp_1	Gp_2	Gp_3	Gp_4	Gp_5
1	2+ i	2+ i	5+2i	12+5 i	29+12 i

Tablo 2.7. Gauss Pell Sayıları

Gauss Pell-Lucas sayıları: n≥ 2 için Gq_n tanımlanmıştır. G$q_0 = 2 - 2i$,G$q_1 = 2 + 2i$ olmak üzere G$q_n = 2q_{n-1} + iq_{n-2}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Pell-Lucas sayıları aşağıdaki Tablo 2.8' de verilmiştir.

Gq_0	Gq_1	Gq_2	Gq_3	Gq_4	Gq_5
$2 - 2i$	$2 + 2i$	$6 + 2i$	14+6 i	34+14i	82 +34i

Tablo 2.8. Gauss Pell Lucas Sayıları

Gauss Jacobsthal sayıları: n≥ 2 için Gj_n tanımlanmıştır. G$j_0 = \frac{i}{2}$,G$j_1 = 1$ olmak üzere G$j_n = j_n + ij_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Jacobsthal sayıları aşağıdaki Tablo 2.9' da verilmiştir.

Gj_0	Gj_1	Gj_2	Gj_3	Gj_4	Gj_5
1	$1+i$	3+ i	$5+3i$	11+5 i	$21+11i$

Tablo 2.9. Gauss Jacobsthal Sayıları

Gauss Jacobsthal-Lucas sayıları: n≥ 2 için $G\vartheta_n$ tanımlanmıştır. $G\vartheta_0 = \frac{i}{2}$,$G\vartheta_1 = 1$ olmak üzere $G\vartheta_n = \vartheta_n + i\vartheta_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Bazı Gauss Jacobsthal-Lucas sayıları aşağıdaki Tablo 2.10' da verilmiştir.

$G\vartheta_0$	$G\vartheta_1$	$G\vartheta_2$	$G\vartheta_3$	$G\vartheta_4$	$G\vartheta_5$
$1+2i$	$i+5$	$7+5i$	17+7 i	$31+17i$	$65+31i$

Tablo 2.10. Gauss Jacobsthal-Lucas Sayıları

3. GAUSS LEONARDO SAYILARI

Tezimizin ana kısmını oluşturan Gauss Leonardo sayılarını makalemizde de görüleceği üzere aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$GL_n = Le_n + Le_{n-1}i \; ; \; n > 1$

Burada, GL_n n'inci Gauss Leonardo sayısını, Le_n ise n'inci Leonardo sayısını belirtir. Gauss Leonardo sayılarının rekürans bağıntısında Leonardo sayıları rekürans bağıntısında yerine yazılırsa eşitliğin sağlandığı görülür. Şu şekilde yazılabilir:

$GL_n = Le_n + Le_{n-1}i$

$= (2Le_{n-1} - Le_{n-3}) + (2Le_{n-2} - Le_{n-4})i$

$= 2Le_{n-1} - Le_{n-3} + 2Le_{n-2}i - Le_{n-4}i$

$= 2(Le_{n-1} + Le_{n-2}i) - (Le_{n-3} + Le_{n-4}i)$

$2GL_{n-1} = 2(Le_{n-1} + Le_{n-2}i)$

$GL_{n-3} = Le_{n-3} + Le_{n-4}i$

Başka bir deyişle Gauss Leonardo dizisi şu şekilde yazılabilir: Rekürans bağıntısı,

$n \geq 3 \; için$

$GL_n = 2GLe_{n-1} - GLe_{n-3}$

Başlangıç koşulları $GL_0 = 1 - i$, $GL_1 = 1 + i$, $GL_2 = 3 + i$ ve $GL_3 = 5 + 3i$ 'dir. Gauss Leonardo sayılarının bazı değerleri Tablo 3.1' de verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
GL_n	1-i	1+i	3+i	5+3i	9+5i	15+9i	25+15i	41+25i

Tablo 3.1. Gauss Leonardo Sayıları

3.1. Üreteç Fonksiyonu

Gauss Leonardo sayıları için üreteç fonksiyonu şu şekilde verilir:

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (GL_n)x^n = \frac{(1-i)+(-1+3i)x+(1-i)x^2}{1-2x+x^3}$

3.1.1. İspat

Üreteç fonksiyonun tanımından Gauss Leonardo sayıları için aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

g(x)= $GL_0 + GL_1x + GL_2x^2 + \cdots + GL_nx^n + \cdots$

2xg(x)= $2GL_0x + 2GL_1x^2 + 2GL_2x^3 + \ldots + 2GL_{n-1}x^n + \ldots$

$-x^3g(x) = -GL_0x^3 - GL_1x^4 - GL_2x^5 + \ldots - GL_{n-3}x^n + \cdots$

Bu işlemleri taraf tarafa toplayalım;

(1-2x+x^3)g(x) =$GL_0 + (GL_1 - 2GL_0)x$

$+(GL_2 - 2GL_1)\, x^2$

$+(GL_3 - 2GL_2 + GL_0)x^3 +$

.

.

.

+

$(GL_n - 2GL_{n-1} + GL_{n-3})x^n + \ldots$

Parantezlerin içlerinin sıfırlandığı rekürans bağıntısından dolayı açıktır. g(x)'i yalnız bırakırsak eşitliğin sağ tarafı aşağıdaki gibidir.

$$g(x) = \frac{GL_0 + (GL_1 - 2GL_0)x + (GL_2 - 2GL_1)\, x^2}{1 - 2x + x^3}$$

$GL_0, GL_1\ ve\ GL_2$ değerlerini yerine yazılır. Buradan,

$$g(x) = \frac{(1 - i) + (-1 + 3i)x + (1 - i)x^2}{1 - 2x + x^3}$$

ispat tamamlanmış olur.

3.2. Binet Formülü

$n \geq 0$ için Gauss Leonardo sayıları için Binet formülü yazılırsa

$$GL_n = T\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + 2\beta^n + K$$

$T = 1 + 2i + \sqrt{5}$ ve $K = -1 - i$.

3.2.1. İspat

Binet formülü üreteç fonksiyonu tanımından yararlanılarak bulunur:

$g(x) = GL_0 + GL_1x + GL_2x^2 + \cdots + GL_nx^n + \cdots$

$2xg(x) = 2GL_0x + 2GL_1x^2 + 2GL_2x^3 + \ldots + 2GL_{n-1}x^n + \ldots$

$-x^3g(x) = -GL_0x^3 - GL_1x^4 - GL_2x^5 + \ldots - GL_{n-3}x^n + \cdots$

Buradan;

$(1-2x+x^3)g(x) = GL_0 + (GL_1 - 2GL_0)x + (GL_2 - 2GL_1)x^2 + (GL_3 - 2GL_2 + GL_0)x^3 + \ldots +$

$(GL_n - 2GL_{n-1} + GL_{n-3})x^n + \ldots$

Sonuç olarak

$$g(x) = \frac{GL_0 + (GL_1 - 2GL_0)x + (GL_2 - 2GL_1)x^2}{1 - 2x + x^3}$$

$$= \frac{(1-i) + (-1+3i)x + (1-i)x^2}{1 - 2x + x^3}$$

$$= \frac{AX + B}{(1 - x - x^2)} + \frac{C}{(1-x)}$$

Buradan A= $2i$, B=2, C=(-1-i)

$$\frac{2ix + 2}{1 - x - x^2} = \frac{D}{1 - \alpha x} + \frac{E}{1 - \beta x}$$

$D(1-\beta) + E(1 - \alpha) = 2ix + 2$

$D\alpha + E\beta = 2i + 2$

$-D\beta - E\alpha = 2i$

$D(\alpha - \beta) + E(\beta - \alpha) = 4i + 2$

$\alpha - \beta = \sqrt{5}$

$D + E = 2 \qquad D - E = \frac{4i + 2}{\sqrt{5}}$

$D = \frac{1+2i+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}, E = \frac{\sqrt{5}-1-2i}{\sqrt{5}},$

$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$= (\frac{1+2i+\sqrt{5}}{\sqrt{5}})\frac{1}{(1-\alpha x)} + (\frac{\sqrt{5}-1-2i}{\sqrt{5}})\frac{1}{(1-\beta x)} + (-1-\mathrm{i})\frac{1}{(1-x)}$

Eşitlikte değerler yerlerine konularak yazılırsa;

$$\frac{(1-i)+(-1+3\mathrm{i})x+(1-\mathrm{i})\,x^2}{1-2\mathrm{x}+x^3} = \frac{D}{(1-\alpha x)} + \frac{E}{(1-\beta x)} + \frac{C}{(1-x)}$$

$$=(\sum_{n=0}^{\infty} D\alpha^n x^n)+(\sum_{n=0}^{\infty} E\beta^n x^n)+(\sum_{n=0}^{\infty} Cx^n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (D\alpha^n + E\beta^n + C)x^n$$

Buradan;

$$\mathrm{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}(D\alpha^n + E\beta^n + C)x^n$$

T ve K gördüğümüz yere eşitlikte yerine yazılırsa T= $1+2i+\sqrt{5}$ ve K=-1-i

$$GL_n = T\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right) + 2\beta^n + K$$

İspat tamamlanmış olur.

Gauss Leonardo sayılarının Binet formülünü Fibonacci sayılarını kullanarak da ifade edebiliriz. Gauss Leonardo sayılarının rekürans bağıntısında ki Leonardo sayılarının yerine Fibonacci sayıları cinsinden de yazılabilir. $GL_n = (2F_{n+1} - 1) + (2F_n - 1)i$

Örnek 1:

$n = 3$ için Binet formülünde yerine yazılırsa

$$GL_n = T\left(\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}\right) + 2\beta^n + K$$

$$=(1+2i+\sqrt{5})\,(\tfrac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha-\beta})+2\beta^3\text{-1-i}$$

$$=(1+2i+\sqrt{5})\,(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+2\beta^3\text{-1-i}$$

$$=(1+2i+\sqrt{5})((\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^2+(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}).(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})+(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^2)+2(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^3\text{-1-i}$$

$$= 2 + 4i + 2\sqrt{5} + 4 - 2\sqrt{5} + (-1 - i)$$

$$=5+3i$$

3.3. Gauss Leonardo Sayıları için Cassini Formülü

$n > 0$ için aşağıdaki özdeşlik sağlanır.

$$GL_{n-1}GL_{n+1} - {GL_n}^2 = (\frac{3+i}{5})8^{-n}[(-2-i)((8\alpha)^n((2\alpha+2i) + (8\beta)^n\left((4-3i)+(2-i)\sqrt{5}\right) + 2^{1+2n}((-5+5i)(-2)^n + ((2+i) + i\sqrt{5})(2\alpha^n))]$$

3.3.1. İspat

Binet formülü kullanılarak ispat yapılırsa;

$$GL_{n-1}GL_{n+1} - {GL_n}^2$$

$$= [(1+2i+\sqrt{5})(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}) + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + (-1 - i)][(1+2i+\sqrt{5})(\frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}) + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + (-1-i)]$$

$$- \left[\left(1+2i+\sqrt{5}\right)\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}\right) + 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + (-1-i)\right]^2$$

$$= (\frac{3+i}{5})8^{-n}[(-2-i)(4(1+\sqrt{5}))^n((1+2i)+\sqrt{5}) + (4-4\sqrt{5})^n((4-3i)+(2-i)\sqrt{5}) + 2^{1+2n}((-5+5i)(-2)^n + ((2+i)+i\sqrt{5})(1+\sqrt{5})^n)$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Cassini özdeşliğinde Binet formülünde de olduğu gibi Leonardo sayıları ve Fibonacci sayıları arasındaki ilişki kullanılarak $GL_n = (2F_{n+1} - 1) + (2F_n - 1)i$ bu özdeşliği kullanarak aşağıdaki gibi Cassini özdeşliği elde edilebilir.

$GL_{n-1}GL_{n+1} - {GL_n}^2 = (8(-1)^{n-1} - 4F_n + 6F_{n-1}) + (4(-1)^n - 2F_{n-1})i.$

3.4. Gauss Leonardo Dizisinin Matris Gösterimi

Bu bölümde Leonardo sayılarının matris gösterimini veriyoruz. Leonardo sayılarının matris gösterimi Fibonacci sayılarının toplamlarıyla da ifade edilebilir. Şimdi aşağıdaki matrislere bakalım:

Şimdi bir A matrisi tanımlayalım. A matrisinin ilk satırı görüldüğü gibi Leonardo dizisinin karakteristik denkleminin katsayılarından oluşmaktadır. B matrisinin elemanları ile $GL_0 = 1 - i$, $GL_1 = 1 + i$, $GL_2 = 3 + i$ 'dir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ve} \quad B = \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

Ardından aşağıdaki denklemin geçerli olduğunu görmek kolaydır:

$$\begin{bmatrix} GL_3 \\ GL_2 \\ GL_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

Tümevarım yoluyla şunu söylüyoruz;

$$\begin{bmatrix} GL_{n+2} \\ GL_{n+1} \\ GL_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

$n = 0\ için$ sağlar.

$$\begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

$n = 1\ için$

$$\begin{bmatrix} 5 + 3i \\ 3 + i \\ 1 + i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^1 \begin{bmatrix} 3 + i \\ 1 + i \\ 1 - i \end{bmatrix}$$

$n = 2\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_4 \\ GL_3 \\ GL_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+5i \\ 5+3i \\ 3+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$n = 3\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_5 \\ GL_4 \\ GL_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15+9i \\ 9+5i \\ 5+3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+i \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$n = k\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_{k+2} \\ GL_{k+1} \\ GL_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

$n = k+1\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_{k+3} \\ GL_{k+2} \\ GL_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

Böylece tümevarım yoluyla ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca, aşağıdaki özellik de geçerlidir:

$$\begin{bmatrix} GL_{2n+2} \\ GL_{2n+1} \\ GL_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} GL_{n+2} \\ GL_{n+1} \\ GL_n \end{bmatrix}$$

$n = 0\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} GL_2 \\ GL_1 \\ GL_0 \end{bmatrix}$$

$n = 1\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_4 \\ GL_3 \\ GL_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GL_3 \\ GL_2 \\ GL_1 \end{bmatrix}$$

$n = 2\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_6 \\ GL_5 \\ GL_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GL_4 \\ GL_3 \\ GL_2 \end{bmatrix}$$

$n = 3\ için$

$$\begin{bmatrix} GL_8 \\ GL_7 \\ GL_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} GL_5 \\ GL_4 \\ GL_3 \end{bmatrix}$$

3.4.1. Teorem

$k \geq 3$ için

$$A^n = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+4} & -\mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_{n+3} \\ \mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+1} & -\mathbb{F}_{n+2} \\ \mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_n & -\mathbb{F}_{n+1} \end{bmatrix}$$

Buradan $\mathbb{F}_k = \sum_{i=0}^{k-3} F_i$ ve F_k k. Fibonacci sayısıdır.

3.4.2. İspat

Fibonacci toplamlarının özelliklerini kullanarak

$$\mathbb{F}_k = \sum_{i=0}^{k-3} F_i \text{ ve } \mathbb{F}_k = F_{k-1} - 1$$

Ardından tümevarım yöntemini kullanarak doğruluğunu görebiliriz.

$n = 1\ için$

$$A^n = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+4} & -\mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_{n+3} \\ \mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+1} & -\mathbb{F}_{n+2} \\ \mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_n & -\mathbb{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+3} - 1 & -F_{n+1} + 1 & -F_{n+2} - 1 \\ F_{n+2} - 1 & -F_n + 1 & -F_{n+1} + 1 \\ F_{n+1} - 1 & -F_{n-1} + 1 & -F_n + 1 \end{bmatrix}$$

Ve

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+4} & -\mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_{n+3} \\ \mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+1} & -\mathbb{F}_{n+2} \\ \mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_n & -\mathbb{F}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+5} & -\mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+4} \\ \mathbb{F}_{n+4} & -\mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_{n+3} \\ \mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+1} & -\mathbb{F}_{n+2} \end{bmatrix}$$

$n + 1$ için doğru olduğunu gösterir. İspat tamamlanmış olur.

3.4.3. Teorem

$$det(A^n) = (-1)^n.$$

3.4.4. İspat

Buradan

$$A^n = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_{n+4} & -\mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_{n+3} \\ \mathbb{F}_{n+3} & -\mathbb{F}_{n+1} & -\mathbb{F}_{n+2} \\ \mathbb{F}_{n+2} & -\mathbb{F}_n & -\mathbb{F}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+3} - 1 & -F_{n+1} + 1 & -F_{n+2} - 1 \\ F_{n+2} - 1 & -F_n + 1 & -F_{n+1} + 1 \\ F_{n+1} - 1 & -F_{n-1} + 1 & -F_n + 1 \end{bmatrix}$$

Laplace genişletme yöntemi ve temel satır işlemleri kullanılarak,

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} - 1 & -F_{n-1} + 1 & -F_n + 1 \\ F_n & -F_{n-2} & -F_{n-1} \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Daha sonra

$$det(A^n) = F_n F_{n-2} - {F_{n-1}}^2$$

Fibonacci sayıları için iyi bilinen Cassini Özelliği bulunmuş olur.

Örnek 2:

$n = 4$ *için*

$$A^4 = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -7 \\ 7 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_8 & -\mathbb{F}_6 & -\mathbb{F}_7 \\ \mathbb{F}_7 & -\mathbb{F}_5 & -\mathbb{F}_6 \\ \mathbb{F}_6 & -\mathbb{F}_4 & -\mathbb{F}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_7 - 1 & -F_5 + 1 & -F_6 + 1 \\ F_6 - 1 & -F_4 + 1 & -F_5 + 1 \\ F_5 - 1 & -F_3 + 1 & -F_4 + 1 \end{bmatrix}$$

Buraya kadar Gauss Leonardo sayıları tanımlandı. Rekürans bağıntısını, Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu, Cassini formülünü, Gauss Leonardo sayılarının matris gösterimi aynı zamanda bu gösterimin Fibonacci toplamlarının özelliklerini kullanılarak verildi. Şimdi Hibrit Gauss Leonardo sayılarını verelim.

3.5. Hibrit Gauss Leonardo Sayıları

Bu bölümde tezin başında da bahsedilmiş olan hibrit sayılarını hatırlatıp, daha sonra Hibrit Gauss Leonardo sayılarının Rekürans bağıntısını, üreteç fonksiyonunu, Binet formülünü vereceğiz. Hibrit sayıları 2018 yılında Özdemir tarafından tanımlanan bir sayı sistemidir. Hibrit sayılar kompleks, dual, hiperbolik sayı sistemlerinin birleşiminden oluşur.

Hibrit sayılar kümesi

W= $\{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$ olarak tanımlanır (Özdemir 2018).

$W_1 = a_1 + bi + c_1\varepsilon + d_1 h$

$W_2 = a_2 + b_2 i + c_2\varepsilon + d_2 h$

W_1, W_2 iki hibrit sayı olmak üzere bu iki hibrit sayısının ayrı ayrı bileşenlerinin çarpımı yukarıda da verdiğimiz Tablo 2.4 üzerinden kolaylıkla görülebilir.

Hibrit sayıları Gauss Leonardo katsayıları ile aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$HGL_n = GL_n + GL_{n+1} i + GL_{n+2}\varepsilon + GL_{n+3} h \; ; \; n \geq 0$$

Burada $HGL_n, n'inci$ Hibrit Gauss Leonardo sayısının belirtir. GL_n tanımını kullanarak şöyle yazılabilir:

$$HGL_n = GL_n + GL_{n+1}i + GL_{n+2}\varepsilon + GL_{n+3}h$$

$$=(2GL_{n-1} - GL_{n-3})$$

$$+(2GL_n - GL_{n-2})i$$

$$+(2GL_{n+1} - GL_{n-1})\varepsilon$$

$$+(2GL_{n+2} - GL_n)h$$

Ve

$$HGL_{n-1} = GL_{n-1} + GL_n i + GL_{n+1}\varepsilon + GL_{n+2}h$$

$$HGL_{n-2} = GL_{n-2} + GL_{n-1}i + GL_n\varepsilon + GL_{n+1}h$$

$n \geq 3$ için Hibrit Gauss Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı şu şekilde yeniden ifade edilebilir:

$$HGL_n = 2HGL_{n-1} - HGL_{n-3}$$

Gauss Leonardo sayılarını Hibrit Gauss Leonardo rekürans bağıntısında tek tek değerlerini yerine yazıp yukarıdaki tablodan hibrit sayılarının çarpımından faydalanılarak başlangıç koşullarını bulabiliriz. Buna göre $n = 0$ için

$HGL_0 = GL_0 + GL_1 i + GL_2\varepsilon + GL_3 h$

$HGL_0 = (1 - i) + (1 + i)i + (3 + i)\varepsilon + (5 + 3i)h$

$HGL_0 = 1 + 3i + 6\varepsilon + 4h$

Aynı şekilde bu işlem $n = 1,2$ için de uygulanıp başlangıç koşulları bulunur.

$HGL_1 = 3 + 9i + 10\varepsilon + 6h \; ve \; HGL_2 = 5 + 15i + 18\varepsilon + 10h.$

Bazı HGL_n değerlerini tablo Tablo 3.2' de gösterelim:

n	HGL_n
0	$1+3i+6\varepsilon+4h$
1	$3+9i+10\varepsilon+6h$
2	$5+15i+18\varepsilon+10h$
3	$9+27i+30\varepsilon+16h$
4	$15+45i+50\varepsilon+26h$
5	$25+75i+82\varepsilon+42h$
6	$41+123i+134\varepsilon+68h$
7	$67+201i+218\varepsilon+110h$
8	$109+327i+354\varepsilon+178h$

Tablo 3.2. Hibrit Gauss Leonardo Sayıları

Gauss Leonardo Hibrit sayılarının üreteç fonksiyonunu bulabilmek için diziyi, dizinin her bir teriminin olduğu bir kuvvet serisi olarak yazmalıyız. Bu kuvvet serisini rekürans bağıntısının katsayılarıyla çarparak oluşturalım, daha sonra üreteç fonksiyonunu bulalım.

3.6. Hibrit Gauss Leonardo Sayılarının Üreteç Fonksiyonu:

Hibrit Gauss Leonardo sayıları için üreteç fonksiyonu şu şekildedir:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(HGL_n)\,x^n$$

$$=\frac{(1+3i+6\varepsilon+4h)+(1+3i-2\varepsilon-2h)x+(-1-3i-2\varepsilon-2h)x^2}{1-2x+x^3}$$

İspat: Üreteç fonksiyonunu bulabilmek için Hibrit Gauss Leonardo sayılarından oluşan kuvvet serisini yazılır;

$$g(x) = HGL_0 + HGL_1x + HGL_2x^2 + \ldots + HGL_nx^n + \ldots$$

ve

$$2xg(x) = 2HGL_0x + 2HGL_1x^2 + 2HGL_2x^3 + \ldots + 2HGL_{n-1}x^n + \ldots$$

$$x^3g(x) = -HGL_0x^3 - HGL_1x^4 - HGL_2x^5 + \ldots - HGL_nx^n + \ldots$$

Buradan;

$$(1 - 2x + x^3)g(x) = HGL_0 + (HGL_1 - 2HGL_0)x$$
$$+(HGL_2 - 2HGL_1)x^2$$
$$+(HGL_3 - 2HGL_2 + HGL_0)x^3$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$+(HGL_n - 2HGL_{n-1} + HGL_{n-3})x^n + \ldots$$

Sonuç olarak

$$g(x) = \frac{HGL_0 + (HGL_1 - 2HGL_0)x + (HGL_2 - 2HGL_1)x^2}{1 - 2x + x^3}$$

$$= \frac{(1 + 3i + 6\varepsilon + 4h) + (1 + 3i - 2\varepsilon - 2h)x + (-1 - 3i - 2\varepsilon - 2h)x^2}{1 - 2x + x^3}$$

İspat tamamlanmış olur.

3.7. Hibrit Gauss Leonardo Sayısı Binet Formülü

$n \geq 0$ *için*

$$HGL_n = \frac{X(\alpha^n + \beta^n) + Y(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}} + (-1 - 3i - 2\varepsilon)$$

Burada X=$\sqrt{5}(1 + 3i + 4\varepsilon + 2h)$,Y=$3 + 9i + 8\varepsilon + 4h$.

3.7.1. İspat

$$g(x) = \frac{HGL_0 + (HGL_1 - 2HGL_0)x + (HGL_2 - 2HGL_1)x^2}{1 - 2\mathrm{x} + x^3}$$

Üreteç fonksiyonunda $HGL_0, HGL_1\ ve\ HGL_2$ değerleri yerlerine yazılıp basit kesirlere ayırma yöntemi ile A, B ve C değerlerini bulalım.

$$\frac{Ax + B}{(1 - x - x^2)} + \frac{C}{(1 - x)}$$

$$= \frac{(1 + 3i + 6\varepsilon + 4h) + (1 + 3i - 2\varepsilon - 2h)x + (-1 - 3i - 2\varepsilon - 2h)x^2}{1 - 2\mathrm{x} + x^3}$$

Burada A, B, C değerleri bulunup yerine yazıldığında AX+B' nin paydasında 2.dereceden denklem olduğu için tekrar basit kesirlere ayırma yöntemini kullanarak E ve F değerlerini bulalım. Buradan gerekli işlemler yapıldığında A=$(2 + 6i + 4\varepsilon + 2h), B = (2 + 6i + 8\varepsilon + 4h)$ ve C=$(-1 - 3i - 2\varepsilon)$ 'nin değeri bu şekildedir.

$$\frac{Ax + B}{(1 - x - x^2)} = \frac{E}{(1 - \alpha x)} + \frac{F}{(1 - \beta x)}$$

Burada hatırlanacağı üzere $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ değerleri bu şekildedir.

$$\frac{(2 + 6i + 4\varepsilon + 2h)x + (2 + 6i + 8\varepsilon + 4h)}{(1 - x - x^2)} = \frac{E}{(1 - \alpha x)} + \frac{F}{(1 - \beta x)}$$

Burada E ve F'nin değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$E = \frac{(3 + 9i + 8\varepsilon + 4h) + \sqrt{5}(1 + 3i + 4\varepsilon + 2h)}{\sqrt{5}}$$

ve

$$F = \frac{(1 + 3i + 4\varepsilon + 2h)\sqrt{5} - (3 + 9i + 8\varepsilon + 4h)}{\sqrt{5}}$$

Buradan tekrar yazılırsa;

$$g(x) = \frac{(1 + 3i + 6\varepsilon + 4h) + (1 + 3i - 2\varepsilon - 2h)x + (-1 - 3i - 2\varepsilon - 2h)x^2}{1 - 2\mathrm{x} + x^3}$$

$$= \frac{(3 + 9i + 8\varepsilon + 4h) + \sqrt{5}(1 + 3i + 4\varepsilon + 2h)}{\sqrt{5}(1 - \alpha x)}$$

$$+\frac{(1+3i+4\varepsilon+2h)\sqrt{5}-(3+9i+8\varepsilon+4h)}{\sqrt{5}(1-\beta x)}+\frac{(-1-3i-2\varepsilon)}{(1-x)}$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}E\alpha^n x^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}F\beta^n x^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}Cx^n\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(E\alpha^n+F\beta^n+C)x^n$$

$$=\left(\frac{X+Y}{\sqrt{5}}\right)\alpha^n+\left(\frac{X-Y}{\sqrt{5}}\right)\beta^n+(-1-3i-2\varepsilon)$$

$$=\frac{X\alpha^n+Y\alpha^n+X\beta^n-Y\beta^n}{\sqrt{5}}+(-1-3i-2\varepsilon)$$

$$=\frac{X}{\sqrt{5}}(\alpha^n+\beta^n)+\frac{Y}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)+\ (-1-3i-2\varepsilon)$$

İspat tamamlanmış olur.

Örnek 3:

$n=2$ için

$$HGL_2=\frac{X(\alpha^2+\beta^2)+Y(\alpha^2-\beta^2)}{\sqrt{5}}+(-1-3i-2\varepsilon)$$

$$=\ \left(\frac{3X+Y\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right)+\ (-1-3i-2\varepsilon)$$

$$=5+15i+18\varepsilon+10h.$$

3.8. Determinant

Matematikte birçok problemin çözümünde kullanabildiğimiz determinant ilk olarak Leibnitz tarafından 1696 yılında ortaya atılmıştır. Bezout, Crammer Langrange, Laplace determinantı geliştirmişlerdir. Cauchy, Jacaobi ve Sylvester tarafından yapılan çalışmalarla da determinant günümüzdeki kullanım şeklini almıştır. (Bozkurt ve Türen, 2003)

S_n, n elemanlı bir kümenin simetrik grubunu ifade etmek üzere; Leibnitz tarafından $A = (a_{i,j})$ bir cisim üzerinde tanımlı n×n tipinde bir kare matrisin determinantı, aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$detA = \sum_{\sigma \epsilon S_n} \left(sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

3.9. Permanent

Birçok matematik bilimci tarafından determinant üzerine uzun yıllar boyunca çalışmalar yapılmıştır. Literatürde determinant üzerine yapılan çalışmalar sırasında, Binet ve Cauchy tarafından 1812 yılında permanent kavramının tanıtıldığı bilinmektedir. (Minc ve Marcus, 1984)

A= $[a_{ij}]$; n×n tipinde bir kare matrisin permanenti aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır;

$$perA = \sum_{\sigma \epsilon S_n} a_{1\sigma(1)}. a_{2\sigma(2)} \ldots\ldots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \epsilon S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

S_n, n elemanlı bir kümenin simetrik grubunun tüm σ permütasyonları üzerindedir. Permanent genelde $per(A)$ sembolü ile gösterilmektedir. Aynı zamanda literatürde artı determinant olarak bilinmektedir. (Yılmaz ve Bozkurt, 2011)

$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ matrisi için

$$perA = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Determinant ve permanentin birçok özelliği benzerdir. Buna nazaran bazı elementer işlemler altındaki 'değişmezlik' ve 'çarpımsallık' özelliğini determinant sağlarken permanent sağlamaz. (Yani bir satırın b katı başka satıra eklenirse determinant değeri değişmezken, permenant değeri değişir.)

Bir matrisin determinatının ve permanentinin hesaplanmasında genellikle çok sayıda işlem yapılması gerekmektedir. Özellikle de yüksek mertebeli matrislerde işlem sayısı çok fazla, çözüm süresi ise çok uzun olmaktadır. Kare matrislerin determinant ve permanentlerinin hesaplanmasına yönelik olarak, matris teoride çeşitli metotlar geliştirilmiştir. Bu metotlardan bir tanesi '**contraction (büzüşme) metodu'** dur.

Contraction metodu bu hesaplamaların yapılmasında büyük kolaylık sağlamıştır ve literatürde önemli bir yere sahiptir. Şimdi de R. A. Brualdi ve P.M. Gibson (1977) tarafından tanımlanan ve bu çalışmada permanent hesaplamada kullanacağımız contraction metodunun tanımını verelim.

Tanım [Brualdi,1977]: A= $[a_{i,j}]$, satır vektörleri $r_1, r_2, \ldots, r_m$ olacak şekilde $m \times n$ boyutlu bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin k. kolonun iki elemanı sıfırdan farklı diğer elemanlarının hepsi sıfır ise A matrisine k. kolonuna göre contraction metodu uygulanabilir denir. Kabul edelim ki, A matrisinde $a_{k,i} \neq 0 \neq a_{k,j}$ ve i≠ j olmak üzere k. kolonuna göre contraction metodunu uygulayalım. O halde $A_{ij:k}$ olarak adlandıracağımız $(m-1) \times (n-1)$ boyutlu matris; A matrisinde i. satıra $a_{jk}r_i + a_{ik}r_j$ vektörü yazılması, j. satır ve k. kolonun silinmesiyle elde edilir. Bu işlem A matrisinde k. kolonuna göre contraction olarak adlandırılır. $a_{k,i} \neq 0 \neq a_{k,j}$ ve $i \neq j$ olmak koşuluyla; A matrisinde k. satıra göre contraction metodu uygulanabiliyorsa $A_{k;ij} = (A^T_{ij:k})^T$ şeklindeki ifade doğru olmaktadır. Eğer A matrisi negatif olmayan bir matris ve B matrisi de A matrisinden contraction metodu ile elde ediliyorsa,

$$perA = perB$$

dir.

Yineleme ilişkisine sahip olan polinom ve dizilerin hesaplanmak istenilen terimlerini bu ilişkiye bağlı kalmadan da hesaplamak amacıyla çalışmalar yapılmıştır. Yapılan bu çalışmalar sonrasında geliştirilen yöntemlerden birisi, Hessenberg matrisler yardımıyla çözüme ulaşan Hessenberg Matris yöntemidir. Bu yöntem kullanılarak determinant ya da permanent hesabı yapılırken, ilk olarak hesaplanmak istenilen terimi elde edecek şekilde boyutu genişleyen bir **Hessenberg** matris tanımlanmaktadır. Tanımlanan bu Hessenberg matrisin determinantının veya permanentinin, aradığımız polinom veya dizinin hesaplanmak istenilen terimine eşit olduğu gösterilir. Bu yöntem ilk olarak 1964' te Minc tarafından kullanılmıştır. Minc (1964) $n \times n$ (0,1)-matris $F(n; k)$ yı, "$k \leq n + 1$ ve $i - 1 \leq j \leq i + k - 1$ şartını sağlayan (i, j) pozisyonundaki elemanlar 1' e diğer elemanlar ise 0' a eşittir" şeklinde bir Hessenberg matris tanımlamış ve

$$\mathrm{per}\big(F(n;\,k)\big) = f_{k,n+k-1}$$

olduğunu göstermiştir.

Tanım: A$= [a_{i,j}]$ $n-$kare matris olmak üzere $i > j+1$ ise $a_{i,j} = 0$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ & a_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Formundaki matris üst Hessenberg matris olarak, üst Hessenberg matrisin transpozesi formundaki matris ise alt Hessenberg matris olarak adlandırılır. [Horn,1985]

Tanım: A$= [a_{i,j}]$ $n-$kare matris olsun, bu durumda hem alt hem de üst Hessenberg matris, tridiagonal matris olarak isimlendirilir. Yani $|i-j| > 1$ ise $a_{i,j} = 0$ diğer bir ifadeyle

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

yukarıda görüldüğü gibidir.

Matematik, istatistik alanları ve diğer birçok farklı disiplinde karşımıza çıkan Tridiagonal matrisler, literatürde 'Contiunant Matris' ve 'Jacobi Matris' isimleri ile de karşımıza çıkmaktadır. İstatistik alanında kullanılan tridiagonal matrislerden birisi Eşdeğişkenlik (kovarvans) matrisidir. Bu matris tahminleme metodlarındaki araçlardan birisidir.

3.10. Bir Tipteki Hessenberg Matrislerinin Permanentleri ve Leonardo ve Gauss Leonardo Sayıları

Bu bölümde, bir tür Hessenberg matris ailesi tanımlıyoruz ve contraction(büzüşme) yöntemini kullanarak hesaplıyoruz. Ayrıca, contraction yöntemini kullanarak hesaplamak için Maple 13 kaynak kodu oluşturduk.

P_n=$[p_{ij}]$ ile bir $n \times n$ tipinde bir Hessenberg matris olsun. $p_{11} = p_{12} = p_{13} = 1, p_{mm} = 2, p_{m,m-1} = -1, ve\ p_{t,t+2} = -1\ için\ m = 2,3,\dots,n\ ve\ t = 2,3,\dots,n-2$.Açıkça

$$P_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & \ddots & \\ & & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Sonra aşağıdaki teoremimiz var.

3.10.1. Teorem

P_n'deki gibi bir matris olsun. Sonra

$$P_n = Le_{n-1}$$

3.10.2. İspat

P_n matrisinin tanımından, bu ilk sütunda daraltılabilir. P_n'e ilk kez contraction metodunu uygularsak $P_n^{(1)}$ile gösterelim. Yani,

$$P_n^{(1)} = \begin{bmatrix} Le_k & Le_{k-2} & -Le_{k-1} & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & \ddots & \\ & & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ve bu işleme $n-3$ adıma kadar devam edersek $2 \le k \le n-3$ elde ederiz;

$$P_n^{(k)} = \begin{bmatrix} Le_k & Le_{k-2} & -Le_{k-1} & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & \ddots & \\ & & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ve $n-2$' inci adım aşağıda verilmiştir.

$$P_n^{(n-2)} = \begin{bmatrix} Le_{n-2} & Le_{n-4} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O zaman elimizde

$$perP_n = perP_n^{(n-2)} = 2Le_{n-2} - Le_{n-4} = Le_{n-1}$$

K_n =$[k_{ij}]$ ile bir $n \times n$ tipinde bir Hessenberg matris olsun. $k_{11} = k_{12} = k_{13} = 1, k_{mm} = 2, k_{n,n} = 2 + i, k_{m,m-1} = -1$, $ve\ k_{t,t+2} = -1\ \ için\ m = 2,3,4\ldots, n - 1\ ve\ t = 2,3,4\ldots, n - 2$. Açıkça

$$K_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & \ddots & \\ & & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2+i \end{bmatrix}$$

O halde aşağıdaki teoremimiz var.

3.10.3. Teorem

K_n yukarıdaki gibi bir matris olsun. Sonra

$$perK_n = GL_{n-1}$$

K_n matrisi 1.sütunda contraction metodu uygulanarak ve aşağıdaki adımlar izlenerek önceki teoremde $1 \leq r \leq n - 3$ için aşağıdaki matrisi elde ederiz;

$$K_n^{(r)} = \begin{bmatrix} Le_k & Le_{k-2} & -Le_{k-1} & & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & & \\ & -1 & 2 & 0 & \ddots & \\ & & -1 & 2 & \ddots & -1 \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & -1 & 2+i \end{bmatrix}$$

Ve $n - 2$ ‘inci adım aşağıda verilmiştir.

$$K_n^{(n-2)} = \begin{bmatrix} Le_{n-2} & Le_{n-4} \\ -1 & 2+i \end{bmatrix}$$

O zaman aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$perK_n = perK_n^{(n-2)} = (2+i)Le_{n-2} - Le_{n-4} = GL_{n-1}.$$

Aşağıdaki Maple 13 kaynak kodu ile matrisi elde etmek mümkündür. Contraction metodu adımları bu şekilde elde edilir.

```
restart:
with(LinearAlgebra):
permanent := proc(n)
local i, j, k, c, C;
```

```
c := (i, j) ⟶ piecewise(i = 1 and j = 1, i = 1 and j = 2, 1 , i = 1
and j = 3, 1 , i = j, 2, i = j − 2, −1,
i = j + 1, −1, 0);
C ≔ Matrix(n, n, c):
for k from 0 to n − 3 do
print(k, C):
for j from 2 to n − k do
C[1, j] ≔ C[2, 1]C[1, j] + C[1, 1]C[2, j]:
od:
print(k, eval(C)):
end proc : with(LinearAlgebra):
permanent(n);
```

4. SONUÇ

Bu tezde, Gauss Leonardo sayılarını, Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu, Cassini özdeşliğini ve bazı matrisleri veriyoruz. Daha sonra Hibrit Gauss Leonardo' yu tanımlıyoruz ve sayılar için bazı özellikler elde ediyoruz. Ek olarak $n \times n$ tipinde Leonardo ve Gauss Leonardo olan Hessenberg matris sayılarını ve son olarak da hesaplamayı doğrulamak için bir Maple 13 kaynak kodu veriyoruz.

KAYNAKLAR

Akbıyık, M., & Alo, J. (2021). On Third-Order Bronze Fibonacci Numbers. *mathematics, 9*(20), 1-14.

Aktaş, İ. 2013*''Hessenberg ve Tridiagonal Matrislerin Permanentleri ile Bazı Özel sayı Dizileri Arasındaki İlişkiler''*, Yüksek Lisans Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Konya, 21-26

Akyüz, Z. 2013, '*Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Dizilerinin Terimlerini İçeren Bazı Özdeşlikler ve Fibonacci Tipi Polinomlar'* Doktora Tezi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Sakarya, 9-12

Alşan, H.,2021'*Genelleştirilmiş Hybrid Fibonacci p-Sayıları'* Yüksek Lisans Tezi. Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Konya.

Bilgici, G., (2021) ''*Kısıtlamasız k-Fibonacci ve k-Lucas Genelleştirilmiş Kuaterniyonları*'', Gümüşhane Üni. Fen Bil. Ens. Derg.,11,1,179-182

Birol, F. 2018*''Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Genelleştirilmiş Pell Sayı Dizisileri ve Polinomlarının Lineer Gruplarla İlişkileri'* Yüksek Lisans Tezi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, 6-20,

Brualdi, R. A., & Gibson, P. M. (1977). Convex Polyhedra of Doubly Stochastic Matrices.1.Applications of the Permanent Function. *Elsevier, 22*(2), 194-230.

Catarino, P., & Borges, A. (2019). On Leonardo Numbers. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 89*(1), 75-86.

Cihan, A., 2019 '*Dual-Hiperbolik Fibonacci ve Lucas Sayıları*' Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Sakarya, 4-28.

Coşkun, A., (2010) 'Kompleks Sayılar', *Bilim ve Teknik Dergisi*, 104-106.

Dağdeviren, A., Kürüz, F., & Catarino, P. (2021). On Leonardo Pisano Hybrinomials. *mathematics, 9*(22), 1-9.

Elfıshuk, M. A., 2020 '*Kısıtlamasız Fibonacci Hibrit Sayıları*' Yüksek Lisans Tezi. Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Kastamonu,1-14

Gürel, E. 2015, '*K. Mertebeden Gauss Fibonacci ve K. Mertebedeb Gauss Lucas İndirgeme Bağıntıları*' Doktora Tezi. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Denizli,12-27

Halıcı, S., Öz S., (2016)''On Some Gaussian Pell and Pell-Lucas Numbers'', *Ordu Üni. Bil. Tek.Derg*.,6,1,10-11

Kahraman, E.,2020 '*Dual-Hiperbolik Sayılar için De-Moıvre Formülü'*, Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Kara, N., & Yılmaz, F. (2023). On Hybrid Numbers with Gaussian Leonardo Coefficients. *mathematics, 11*(6), 1-12.

Karataş, A. (2022). On complex Leonardo numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 28*(3), 458-465.

Kırklar, E., 2019'*Bazı Özel Band Matrisler, Sayı Dizileri ve Özellikleri'* Doktora Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Konya.

Koçay, B. 2019,*'Kuaterniyonların Temsil Metodları'* Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara, 11- 24 ve 41-49.

Koshy, T. (2017), ‘*’Recurrences and Generating Functions*’’, Fibonacci and Lucas Numbers With Applications, ISBN:978-0-471-39969-8, A Wiley-Interscience Publication,231-232

Küçük, A. Z. 2019. *k-Tridiagonal Toeplitz Matrislerin Permanentleri.* Doktora Tezi Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.Sakarya,1-11

Meral, M.,2009’*Kuaterniyonlara Ait Matrisler İçin De’Moivre Ve Euler Formülleri*’,Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniverstesi Fen Bilimleri Enstitüsü.Ankara.

Özdemir, G.,2017’*Çok Değişkenli Fibonacci Tipli Polinomlar İçin Üreteç Fonksiyonları ve Uygulamaları’* Doktora Tezi. Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Antalya.

Özkan G, 2012*’Gauss Pell Sayıları’* Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara, 4-40,

Polatlı, E. (2020). Hybrid Numbers With Fibonacci And Lucas Hybrid Number Coefficents. *Prepints.org*, 1-8.

Syznal, A., & Liana. (2018). The Horadam Hybrid Numbers. *General Algebra & Applications, 38*(1), 91-98.

Şahin, A., 2013*’’Hessenberg Matris Yöntemi ile Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Polinomlarının Terimlerinin Hesaplanması’’*, Doktora Tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Eskişehir,19.

Topal, N. 2018, ‘*Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları ve Bazı Uygulamaları*’ Yüksek Lisans Tezi. Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Sakarya.

Yılmaz, F., & Bozkurt, D. (2011). Hessenberg matrices and the Pell and Perrin numbers. *Elsevıer, 131*(8), 1390-1396.

Yılmaz, F.,2013’*k-Mertebeli Lineer Rekürans Bağıntısıyla Tanmlı Sayı Dizileri Ve Özellikleri’* Doktara Tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Konya.

Yılmaz, M.,*2017’Gauss Balans ve Gauss Kobalans Sayıları Üzerine*’ Yüksek Lisans Tezi. Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Denizli.

Zorçelik, A. 2017, ‘*Sayı ve Matris Dizilerinin Üreteç Fonksiyonları’* Yüksek Lisans Tezi. Gaziantep Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü, Gaziantep.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Kara Nagihan

Uyruğu : T.C.

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Ondokuzmayıs Üniversitesi	2015
Lise	Çorum Anadolu Lisesi	2011

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015-	Yahya Kemal Ortaokulu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Kara, N., & Yılmaz, F. (2023). On Hybrid Numbers with Gaussian Leonardo Coefficients. *mathematics, 11*(6), 1-12.

ankara HBM

