ANKARA
HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

GAUSS MERSENNE KATSAYILI HİBRİT SAYILAR

SERHAT YILDIRIM

Tez Danışmanı
PROF. DR. FATİH YILMAZ

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

MAYIS 2024


ankara
HBM

GAUSS MERSENNE KATSAYILI HİBRİT SAYILAR

Serhat YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS
MATEMATİK ANABİLİM DALI
CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ BİLİM DALI

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MAYIS 2024

ETİK BEYAN

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

SERHAT YILDIRIM

(30/05/2024)

TEZ ONAY SAYFASI

Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü MATEMATİK

Anabilim Dalı Tezli Yüksek Lisans Programı öğrencisi Serhat YILDIRIM tarafından hazırlanan Gauss Mersenne Katsayılı Hibrit Sayılar Başlıklı tez çalışması

30 / 05 / 2024 – 10:00 tarih ve saatinde yapılan tez savunma sınavında aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak **KABUL** edilmiştir.

Kabul **Ret**

Başkan (Prof. Dr. Naim TUĞLU/
Gazi Üniversitesi): ☒ ☐

Üye (Prof. Dr. Fatih YILMAZ/
Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi): ☒ ☐

Üye (Doç. Dr. Kadir KANAT/
Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi): ☒ ☐

GAUSS MERSENNE KATSAYILI HİBRİT SAYILAR

(Yüksek Lisans)

Serhat YILDIRIM

ANKARA HACI BAYRAM VELİ ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2024

ÖZET

Bu çalışmada, Gauss Mersenne katsayılı hibrit sayıların tanımı ve bazı karakteristik özellikleri incelendi. Bu bağlamda, Üreteç Fonksiyonu, Binet formülü, Cassini, Catalan, Vajda, D'Ocagne ve Honsberger eşitlikleri elde edildi. Harmonik Gauss Mersenne sayılarının tanımı ve bazı karakteristik özellikleri verildi.Son olarak elemanları harmonik Gauss Mersenne sayıları olan min matris ve bazı özellikleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Hibrit Gauss Mersenne, Üreteç Fonksiyonu, Binet Formülü, Cassini Özdeşliği, Catalan Özdeşliği, Harmonik Gauss Mersenne, Min matris, Permanent

Sayfa Adedi : 36

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Fatih YILMAZ

HYBRİD NUMBERS WİTH GAUSSİAN MERSENNE COEFFİCİENTS

(M.Sc. Thesis)

Serhat YILDIRIM

ANKARA HACI BAYRAM VELİ UNIVERSITY

THE INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES

May 2024

ABSTRACT

In this paper, we consider hybrid numbers with Gaussian Mersenne coefficients and investigate their interesting properties such as the Generating function, Binet formula, Cassini, Catalan, Vajda, D'Ocagne and Honsberger identities. Moreover, we illustrate the results with some examples. The definition and some characteristic properties of harmonic Gauss Mersenne numbers are given. Finally, Min matrix whose elements are harmonic Gauss Mersenne numbers and some of its properties are given.

Science Code : 20401

Key Words : Hibrit Gauss Mersenne, Generating Functıon Binet Formula, Cassini identity, Catalan identity , Harmonik Gauss Mersenne, Min matrix, Permanent

Page Number : 36

Supervisor : Prof. Dr. Fatih YILMAZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca engin bilgilerini, değerli yardımlarını ve bilimsel yönlendirmelerini benden esirgemeyen, harcadığı emek ve verdiği destekten dolayı sayın danışmanım Prof. Dr. Fatih YILMAZ ’a,

ayrıca bilgileriyle yol gösteren Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi Polatlı Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki tüm değerli hocalarıma,

yüksek lisans eğitimim boyunca beni destekleyen ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer dostum Arş.Gör.Selin ERDAL ÖZKAN ‘ a

hayatımın her döneminde olduğu gibi eğitim hayatım boyunca da beni destekleyen, varlıklarıyla daima yüzümü güldüren ve güç veren canım babam Muharrem YILDIRIM ‘a, canım annem Nihal YILDIRIM ‘a teşekkür eder en içten sevgi ve saygılarımı sunarım.

SERHAT YILDIRIM
ANKARA, MAYIS 2024

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

TABLOLARIN LİSTESİ viii

SİMGELER ix

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 7

2.1. Yineleme Bağıntıları 7

3. HİBRİT GAUSS MERSENNE SAYILARI 12

3.1. Yineleme Bağıntısı 12

3.2. Özdeşlikler ve Uygulamalı Örnekler 17

4.HARMONİK GAUSS MERSENNE SAYILARI 23

5. MİN MATRİSLER VE HARMONİK GAUSS MERSENNE SAYILARI 25

6. SONUÇ 31

KAYNAKLAR 32

ÖZGEÇMİŞ 35

TABLOLARIN LİSTESİ

Tablo
Sayfa

Tablo 1. Fibonacci Sayıları 7

Tablo 2. Mersenne Sayıları 8

Tablo 3. Gauss Mersenne Sayıları 8

Tablo 4. Hibrit Sayıların Çarpım Kural Tablosu 9

Tablo 5. Hibrit Gauss Mersenne Sayıları 13

SİMGELER

Bu çalışmada kullanılmış kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\|A\|_p$	A Matrisinin ℓ_p Normu
$\|A\|_2$	A Matrisinin Spektral Normu
$\|A\|_{\mathbb{E}}$	A Matrisinin Öklid Normu
det(A)	A Matrisinin Determinantı
$e^{\circ H}$	Hadamard Üstel Matrisi
F_n	n-inci Fibonacci Sayısı
GM_n	n-inci Gauss Mersenne Sayısı
H_n	n-inci Harmonik Sayı
$\mathbb{HF}_n(\alpha;q)$	n-inci q-Hibrit Fibonacci Sayısı
$\mathbb{H}F_{p,m}(n)$	n-inci Hibrit Fibonacci Sayısı
$\mathbb{HL}_n(\alpha;q)$	n-inci q-Hibrit Lucas Sayısı
HL_n	n-inci Hibrit Leonardo Sayısı
$\mathbb{H}L_{p,m}(n)$	n-inci Hibrit Lucas Sayısı
$\mathbb{H}V_n$	n-inci Genelleştirilmiş Tetranacci Hibrit Sayısı
HQP	n-inci Padovan Hibrit Kuaterniyon
HGM_n	n-inci Hibrit Gauss Mersenne Sayısı
$\mathbb{K}$	Hibrit Sayılar Kümesi
$\tilde{L}_n$	n-inci Pentanacci Lucas Hibrit Sayısı
M_n	n-inci Mersenne Sayısı
mh_n	n-inci Mersenne-Lucas Hibrit Sayısı
$\tilde{P}_n$	n-inci Pentanacci Hibrit Sayısı
perA	A Matrisinin Permanenti

1. GİRİŞ

Matematiğin en eski alanlarından biri olan Sayılar Teorisi son yıllardaki teknolojik gelişmeler ve bilgisayar sistemlerinin temelinde sonlu sayıda işlem yapan makinelerin geliştirilmesiyle daha fazla uygulama yapılabilir bir alan haline gelmiştir. Kullanım alanları olarak günümüzde takvim hesaplamaları, iletişim sistemlerinin ağ tasarımları, yüksek hızlı bilgisayar mimarisi ve güvenilir şifreleme sistemlerinin oluşturulması Sayılar Teorisinin uygulama alanlarına örnek olarak gösterilebilir.

Bu alanın gelişmesine Euclid, Fermat, Euler, Lagrange, Diophantus ve Gauss gibi matematikçiler önemli katkılarda bulunmuşlardır. 1680 yılında Paris Gözlemevi'nin yöneticisi olan Giovanni Domenico Cassini tarafından bu alanda sıkça kullanılan Cassini formülü keşfedilmiş ve Robert Simson tarafından 1753 te kanıtlanmıştır. Catalan özdeşliği, Ekim 1879 tarihli özel araştırma notu olan "Sur la série de Lamé" den alınan bilgiye göre adını Eugène Catalan dan (1814–1894) almıştır. Ancak özdeşlik, toplu çalışmalarının bir parçası olarak Aralık 1886 ya kadar basılı olarak ortaya çıkmamıştır [Catalan, 1886]. Macar-İngiliz matematikçi Steven Vajda (1901–1995), Fibonacci sayıları üzerine kendi adını taşıyan özdeşliği içeren bir kitap yayınlamıştır. Bununla birlikte, özdeşlik daha önce 1960 yılında Dustan Everman tarafından The American Mathematical Monthly de 1396 numaralı problem olarak ve 1901 yılında Alberto Tagiuri tarafından yayınlanmıştır.

Cassini ve Catalan özdeşlikleri, Fibonacci sayıları için matematiksel özdeşliklerdir. Catalan özdeşliğinin özel bir durumu olan Cassini özdeşliği, n-inci Fibonacci sayısı $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

şeklindedir [Catalan, 1886].

Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliğinin $\forall\, n, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $n \geq r$ için

$$F_n^2 - F_{n-r}F_{n+r} = (-1)^{n-r}F_r^2$$

şeklinde bir genelleştirilmesidir [Catalan, 1886].

Cassini özdeşliğinin başka bir genellemesi olan D'Ocagne özdeşliği Philbert Maurice tarafından keşfedilmiştir. Bu özdeşlik $\forall\, n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $m \geq n$ için

$$F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}$$

şeklindedir [Humbert, 1939].

n-inci Fibonacci sayısı için Vajda özdeşliği, $\forall\, n, i, j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$F_{n+i} F_{n+j} - F_n F_{n+i+j} = (-1)^n F_i F_j$$

şeklindedir [Vajda, 1989] .

Son zamanlarda, karmaşık sayıların bir genellemesi olarak düşünülebilecek ve karmaşık sayıların bir kombinasyonundan oluşan hibrit sayılara büyük bir ilgi vardır.

M. Özdemir [Özdemir, 2018] tarafından hibrit sayılar karmaşık, hiperbolik ve dual sayıların bir genellemesi olarak tanımlamıştır. Hibrit sayılar hakkında detaylı bilgi Tanım 2.5. de verilecektir.

C. Kızılateş [Kızılates, 2020], hibrit sayıların bazı genelleştirmeleri olan q-hibrit Fibonacci ve q-hibrit Lucas sayılarının tanımlarını sırasıyla

$$\mathbb{HF}_n(\alpha; q) = \alpha^{n-1}[n]_q + \alpha^n [n+1]_q i + \alpha^{n+1}[n+2]_q \varepsilon + \alpha^{n+2}[n+3]_q h$$

ve

$$\mathbb{HL}_n(\alpha; q) = \alpha^n \frac{[2n]_q}{[n]_q} + \alpha^{n+1} \frac{[2n+2]_q}{[n+1]_q} i + \alpha^{n+2} \frac{[2n+4]_q}{[n+2]_q} \varepsilon + \alpha^{n+3} \frac{[2n+6]_q}{[n+3]_q} h$$

şeklinde vermiştir.

E. G. Koçer ve H. Alsan [Koçer ve Alsan, 2021], $p > 0$ ve $n > p$ için n-inci hibrit Fibonacci ve Lucas p-sayılarını sırasıyla

$$\mathbb{H}F_{p,m}(n) = F_{p,m}(n) + iF_{p,m}(n+1) + \varepsilon F_{p,m}(n+2) + hF_{p,m}(n+3)$$

ve

$$\mathbb{H}L_{p,m}(n) = L_{p,m}(n) + iL_{p,m}(n+1) + \varepsilon L_{p,m}(n+2) + hL_{p,m}(n+3)$$

şekline tanımlamışlardır.

Z. İşbilir ve N. Gürses [İşbilir ve Gürses, 2021], $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için n-inci pentanacci hibrit sayısını ve n-inci pentanacci Lucas hibrit sayısını sırasıyla

$$\tilde{P}_n = P_n + P_{n+1}\mathbf{i} + P_{n+2}\varepsilon + P_{n+3}\mathbf{h}$$

ve

$$\tilde{L}_n = L_n + L_{n+1}\mathbf{i} + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}\mathbf{h}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Y. Alp ve E.G. Koçer, [Alp ve Koçer, 2021], $n \geq 1$ için n-inci hibrit Leonardo sayısını

$$HL_n = Le_n + Le_{n+1}\mathbf{i} + Le_{n+2}\varepsilon + Le_{n+3}\mathbf{h}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Y. Soykan ve E. Taşdemir, [Soykan ve Taşdemir, 2021], n-inci genelleştirilmiş tetranacci hibrit sayılarını

$$\mathbb{H}V_n = V_n + V_{n+1}\mathbf{i} + V_{n+2}\varepsilon + V_{n+3}\mathbf{h}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

E. Özkan ve M. Uysal, [Özkan ve Uysal, 2021], $n \geq 0$ için Mersenne-Lucas hibrit sayılarını

$$mh_n = m_n + im_{n+1} + \varepsilon m_{n+2} + hm_{n+3}$$

şeklinde tanımlamışlardır.

Mersenne, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas hibrit sayıları arasındaki bazı özellikleri [Taşcı ve Sevgi, 2021] de verilmiştir.

Kombinatoryal sayı teorisinde büyük bir öneme sahip olan harmonik sayılar, ilk n doğal sayının 1 e bölünerek bir dizide bir araya getirilmesi ve bu dizideki her sayının toplanmasıyla elde edilir, yani n-inci harmonik sayı H_n

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

şeklinde tanımlanır.

$n \geq 1$ için H_n

$$H_n = \frac{S(n+1,2)}{n!}$$

burada $S(n,2)$ birinci tür Stirling sayısıdır[Benjamin, Preston, Quinn, 2002].

Harmonik sayıların bazı özelliklerine aşağıdaki şekildedir.

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} {H_k}^2 = (n+1){H_{n+1}}^2 - (2n+3)H_{n+1} + 2n + 2$$

$$\sum_{k=1}^{n} k{H_k}^2 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}{H_{n+1}}^2 - \frac{n^2-3n-7}{2}H_{n+1} + \frac{n^2-9n-10}{4} \tag{1.2}$$

(1.3)

$f(x)$ in fark operatörü

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) \tag{1.4}$$

dir. Ayrıca anti fark operatörü toplam özelliklerine sahiptir.

$$\sum_{a}^{b} u(x)\Delta v(x)\delta_x = u(x)v(x)|_a^{b+1} - \sum_{a}^{b} Ev(k)\Delta u(x)\delta_x \tag{1.5}$$

Burada $Ev(x) = v(x+1)$ dir [Tuglu, Kizilates, Kesim, 2015].

$$M = \begin{bmatrix} K & b \\ b^T & c \end{bmatrix}$$

şeklinde bir kare matris olarak tanımlanmıştır. Burada K, $n \times n$ tipinde tekil olmayan matris ve b, $n \times 1$ tipinde bir matris ve c bir reel sayıdır. M matrisinin tersi

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} K^{-1} + \frac{1}{l}K^{-1}bb^TK^{-1} & -\frac{1}{l}K^{-1}b \\ -\frac{1}{l}b^TK^{-1} & c \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

dir ve $l = c - b^TK^{-1}b$ dir [Bahsi, 2016].

Bir matris normu tanımlamanın birkaç farklı yolu vardır, ancak hepsi aynı belirli özellikleri taşır. Öyle ki $A = (a_{ij})$ bir $n \times n$ tipinde matris olsun A nın ℓ_p normu

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir. Özel olarak $p = 2$ seçilecek olursa bu norma Frobenius veya Öklid normu denir ve $\|A\|_{\mathbb{E}}$ ile gösterilir. (1.7)

A nın spektral normu

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1\le i\le n} \lambda_i} \tag{1.8}$$

dir. Burada λ_i, AA^H matrisinin özdeğeri ve A^H, A matrisinin eşlenik transpozesidir.

Frobenius ve spektral norm arasında

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_{\mathbb{E}} \le \|A\|_2 \le \|A\|_{\mathbb{E}} \tag{1.9}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Birçok araştırmacı matris normlarını hesaplamakla ilgilenmektedir. Yazarlar [Graham, Knuth, Patashnik, 1989], [Tuglu, Kizilates, Kesim, 2015], [Petroudi, Pirouz, 2015] ve [Petroudi, Pirouz, Akbıyık, Yılmaz, 2022] çalışmalarını sirkülant matrisler üzerinde yapmıştır. [Yamaç Akbiyik, Akbiyik, Yilmaz, 2021] yayınında yazarlar $H = \left[H_{k_{i,j}}\right]_{i,j=1}^{n}$ ile belirli $n \times n$ tipinde ve onun Hadamard üstel matrisi $e^{\circ H} = e^{H_{k_{i,j}}}$ dir, $k_{i,j} = \min(i,j)$ ve H_n, n-inci harmonik sayıdır, bu matrislerin determinantları, tersleri ve bu matrislerin spektral normu için bazı üst ve alt sınırlar elde etmişlerdir.

C.J. Harman [Harman, 1981] çalışmasında harmonik Pell sayılarını tanımlamış ve elemanları harmonik Pell sayıları olan bir simetrik matris ailesi ve onun Hadamard üstel matrisini oluşturmuş ve bazı lineer cebirsel özelliklerini incelemiştir.

$n \times n$ tipinde $A = (a_{ij})$ matrisinin determinantı ve permanenti sırasıyla

$$\det(A) = \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

ve

$$\mathrm{per}(A) = \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

dir. Burada S_n n-inci dereceden simetrik grubu temsil eder. R.A. Brualdi, P.M. Gibson [Brualdi, Gibson, 1977] çalışmalarında matrisin permanentini hesaplamak için

daralma(contraction) metodu olarak adlandırılan bir yöntem tanımlamışlardır. Bu yöntem aşağıdaki şekilde özetlenebilir. $A = (a_{ij})$, $m \times n$ tipinde satır vektörleri

$$r_1, r_2, \dots, r_m \tag{1.10}$$

olan bir matris olmak üzere A, eğer k sütunu tam olarak iki adet sıfır olmayan eleman içeriyorsa bu sütun üzerine daralabilir. Yani $a_{ik} \neq 0$, $a_{jk} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere i ve j satırlarına göre k sütunu üzerine A nın daralması A matrisinde j-inci satır ve k-inci sütun silinip i-inci satır yerine $a_{jk}r_i + a_{ik}r_j$ yazılarak elde edilen $(m-1) \times (n-1)$ tipindeki $A_{ij:k}$ matrisine i ve j satırlarına göre k sütunu üzerine A nın daralması denir. Eğer $a_{ki} \neq 0$, $a_{kj} \neq 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere i ve j sütununa göre k satırı üzerine A nın daralması $A_{k:ij} = \left[A_{ij:k}^T\right]^T$ matrisidir. Biliyoruz ki eğer A bir tamsayı matrisi ve B matrisi A matrisinin bir daralması ise

$$perA = perB$$

dir.

Bu tezin ilk kısmında temel bilgiler ve bazı sayı dizileri ile ilgili temel tanımlar verilecektir. İkinci kısımda hibrit Gauss Mersenne sayıları tanımlanacak ve bu sayıların üreteç fonksiyonu verilip buradan yararlanılarak Binet formülü elde edilecektir. Hibrit Gauss Mersenne sayılarının Binet formülünü kullanarak Cassini, Catalan, Vajda, D'Ocagne, Honsberger özdeşlikleri, bu özdeşliklerle alakalı örnekler verilecektir. Daha sonra hibrit Gauss Mersenne sayıları ile ilgili toplama formülü verilip üçüncü kısmında harmonik Gauss Mersenne sayıları ve bazı karakteristik özellikleri incelenecektir. Dördüncü kısımda elemanları harmonik Gauss Mersenne sayıları olan min matrisler ile ilgili bazı özellikler

elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Yineleme Bağıntıları

Tanım 2.1

Dizideki herhangi bir terimi kendisinden önceki terimleri kullanarak ifade edebilmemizi sağlayan bağıntılara yineleme bağıntısı denir. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ sonsuz bir dizi, $k \in \mathbb{N}$ sabit ve $f: \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ başlangıç değerleri olmak üzere ve $\forall\, n \geq k$ için

$$a_n = f(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \dots, a_{n-k}) \tag{2.1}$$

fonksiyonuna $k.$ mertebeden yineleme bağıntısı denir. Dizinin diğer tüm elemanları (2.1) denklemi ve $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ başlangıç koşulları ile belirlenir [Koshy, 2001].

Tanım 2.2

Her $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ yineleme bağıntısına ve $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ başlangıç koşullarına sahip olan (F_n) dizisi, Fibonacci sayı dizisi olarak adlandırılır. Burada F_n sayısına n-inci Fibonacci sayısı denir.

Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2.2}$$

biçimindedir [Koshy, 2001].

Bazı Fibonacci sayıları Tablo 1 de verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13

Tablo 1: Fibonacci Sayıları

Tanım 2.3.

Mersenne sayıları $M_0 = 0$, $M_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$M_{n+2} = 3M_{n+1} - 2M_n$$

şeklinde tanımlıdır [Koshy ve Gao, 2013].

Ayrıca Binet formülü

$$M_n = 2^n - 1$$

şeklinde de ifade edilir [Koshy ve Gao, 2013].

Bazı Mersenne sayıları Tablo 2 de verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
M_n	0	1	3	7	15	31	63	127

Tablo 2: Mersenne Sayıları

Tanım 2.4.

Gauss Mersenne sayıları $GM_0 = \frac{-i}{2}$, $GM_1 = 1$ başlangıç koşulları ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ için

$$GM_n = 3GM_{n-1} - 2GM_{n-2}$$

şeklinde tanımlıdır ve

$$GM_n = M_n - iM_{n-1}$$

$$GM_n = 2GM_n + 1 + i$$

eşitlikleri de geçerlidir [Taşcı, 2021].

Bazı Gauss Mersenne sayıları Tablo 3 de verilmiştir.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
GM_n	$-i/2$	1	$3+i$	$7+3i$	$15+7i$	$31+15i$	$63+31i$	$127+63i$

Tablo 3: Gauss Mersenne Sayıları

Tanım 2.5.

Hibrit sayılar kümesi $\mathbb{K}$ ile gösterilir [Özdemir, 2018].

$$\mathbb{K} = \{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = -1,\ \varepsilon^2 = 0,\ h^2 = 1,\ ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

olarak tanımlanır. Bu sayı kümesi, dörtlü bir dizi olarak düşünülebilir ve reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimler sırasıyla

$$1 = (1,0,0,0), \qquad i = (0,1,0,0), \qquad \varepsilon = (0,0,1,0), \qquad h = (0,0,0,1)$$

olarak tanımlanır. Bu birimler hibrit birimler olarak adlandırılır. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$, hibrit sayısı için a gerçek sayısı skaler kısım olarak adlandırılır ve $S(Z)$ olarak gösterilir. $bi + c\varepsilon + dh$ kısmı vektörel kısım olarak adlandırılır ve $V(Z)$ ile gösterilir. Hibrit sayılar birleşme özelliğine sahipken değişme özelliğine sahip değildir, bu aşağıdaki hibrit sayıların çarpma işlemi ile ilgili tabloda açıkça görülür.

$\times$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$h+1$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Tablo 4: Hibrit Sayıların Çarpım Kural Tablosu

Tanım 2.6.

k-Mertebeli lineer homojen (sabit katsayılı) yineleme bağıntısı $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ ve $c_k \neq 0$ için

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k}$$

Şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.7.

$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ yineleme bağıntısının karakteristik denklemi

$$r^2 - c_1 r - c_2 = 0$$

dir. Bu denklemin kökleri α ve β olmak üzere genel çözümü

$$a_n = ca^n + d$$

dir. Bu denklemde c ve d sabit sayılardır [Koshy, 2001].

Tanım 2.8.

Lineer homojen denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan ve Fransız matematikçi Abraham De Moivre tarafından bulunan kavram Fibonacci yineleme bağıntısının çözümünde de kullanılmıştır. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ reel sayılar olmak üzere

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

fonksiyonu $\{a_n\}$ dizisinin üreteç fonksiyonu olarak adlandırılır. Aynı zamanda üreteç fonksiyonu $a_1, a_2, \dots, a_n$ sonlu dizisi için de

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

şeklinde ifade edilir.

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

dir.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

iki üreteç fonksiyonu olmak üzere $n \geq 0$ için $a_n = b_n$ ise bu üreteç fonksiyonları eşittir denir.

Not 2.1.

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \cdots + a^nx^n + \cdots,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{n} (a_n + b_n)x^n,$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n$$

ifadeleri üreteç fonksiyonlarında işlem yaparken sıkça kullanılan ifadelerdir.

Tanım 2.9.

Fibonacci sayı dizisinin Binet formülü $\alpha = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$, $\beta = \left(1 - \sqrt{5}\right)/2$ olmak üzere $\forall\, n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

dir [Koshy, 2001].

3. HİBRİT GAUSS MERSENNE SAYILARI

Bu bölümde, Hibrit Gauss Mersenne sayılarının tanımı ve bununla ilgili üreteç fonksiyonu, Binet formülü ve ispatları ile birlikte bazı özdeşlikler verilecektir.

Not 3.1.

Binet formülünde verilecek olan A ve B eşitlikleri tezin bu bölümünün tamamı için geçerlidir.

3.1. Yineleme Bağıntısı

Tanım 3.1.

Hibrit Gauss Mersenne sayıları $\forall\, n \in \mathbb{Z}^{+} \cup \{0\}$ için

$$HGM_n = GM_n + GM_{n+1}\, i + GM_{n+2}\, \varepsilon + GM_{n+3}\, h \tag{3.1}$$

ile tanımlanır. Burada HGM_n , n-inci Gauss Mersenne katsayılı hibrit sayıdır.

Tanım 3.2.

n-inci hibrit Gauss Mersenne sayıları $HGM_0 = 1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h$ ve

$HGM_1 = 3 + 10i + 14\varepsilon + 12h$ başlangıç koşulları ile $n \geq 2$ için

$$HGM_n = 3HGM_{n-1} - 2HGM_{n-2} \tag{3.2}$$

şeklinde yineleme bağıntısı verilir.

Bazı hibrit Gauss Mersenne sayıları Tablo 5 de verilmiştir.

n	HGM_n
0	$1+\frac{7}{2}i+6\varepsilon+6h$
1	$3+10i+14\varepsilon+12h$
2	$7+23i+30\varepsilon+24h$
3	$15+49i+62\varepsilon+48h$
4	$31+101i+126\varepsilon+96h$
5	$63+205i+254\varepsilon+192h$
6	$127+413i+510\varepsilon+384h$
7	$255+829i+1022\varepsilon+768h$

Tablo 5: Hibrit Gauss Mersenne Sayıları

Teorem 3.1.

$n \geq 2$ için

$$3HGM_{n-1} - 2HGM_{n-2} = GM_n + GM_{n+1}\,i + GM_{n+2}\,\varepsilon + GM_{n+3}\,h$$

dir.

İspat

(3.1) ve (3.2) ile verilen eşitliklerden ve Tanım 2.4 den yararlanarak

$$\begin{aligned} HGM_n &= GM_n + GM_{n+1}\,i + GM_{n+2}\,\varepsilon + GM_{n+3}\,h \\ &= 3GM_{n-1} - 2GM_{n-2} \\ &\quad +(3GM_n - 2GM_{n-1})i \\ &\quad +(3GM_{n+1} - 2GM_n)\varepsilon \\ &\quad +(3GM_{n+2} - 2GM_{n+1})h \end{aligned}$$

şeklinde yazarız. $n-1$-inci ve $n-2$-inci Hibrit Gauss Mersenne sayıları

$$HGM_{n-1} = GM_{n-1} + GM_n\, i + GM_{n+1}\, \varepsilon + GM_{n+2}\, h$$

$$HGM_{n-2} = GM_{n-2} + GM_{n-1}\, i + GM_n\, \varepsilon + GM_{n+1}\, h$$

şeklindedir. Bu ifadeleri kullanarak $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ için Gauss Mersenne katsayılı hibrit sayılara ait yineleme bağıntısını

$$HGM_0 = 1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h \text{ ve } HGM_1 = 3 + 10i + 14\varepsilon + 12h$$

başlangıç koşulları ile

$$HGM_n = 3HGM_{n-1} - 2HGM_{n-2} = GM_n + GM_{n+1}\, i + GM_{n+2}\, \varepsilon + GM_{n+3}\, h$$

şeklinde yazılır. İspat tamamlanır.

Lemma 3.1.

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$HGM_n = 2HGM_{n-1} + (1 + 3i + 2\varepsilon)$$

dir.

İspat

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için $GM_{n+1} = 2GM_n + 1 + i$ kullanılarak

$$HGM_n = GM_n + GM_{n+1}\, i + GM_{n+2}\, \varepsilon + GM_{n+3}\, h$$

$$= 2HGM_{n-1} + (1 + 3i + 2\varepsilon)$$

elde edilir.

Hibrit Gauss Mersenne sayıları için üreteç fonksiyonu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.

$n \geq 0$ için,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (HGM_n)x^n = \frac{\left(1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h\right) + \left(\frac{-i}{2} - 4\varepsilon - 6h\right)x}{1 - 3x + 2x^2}$$

dir.

İspat

İlk olarak

$$g(x) = HGM_0 + HGM_1x + HGM_2x^2 + \ldots + HGM_nx^n + \cdots$$

yazılır ve

$$-3xg(x) = -3HGM_0x - HGM_1x^2 - 3HGM_2x^3 - \ldots - 3HGM_{n-1}x^n - \cdots$$

$$2x^2g(x) = 2HGM_0x^2 + 2HGM_1x^3 + 2HGM_2x^4 + \ldots + 2HGM_{n-2}x^n + \cdots$$

elde edilir ve yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}(1 - 3x + 2x^2)g(x) = {} & HGM_0 + (HGM_1 - 3HGM_0)x \\ & + (HGM_2 - 3HGM_1 + 2HGM_0)x^2 \\ & + (HGM_3 - 3HGM_2 + 2HGM_1)x^3 \\ & \vdots \\ & + (HGM_n - 3HGM_{n-1} + 2HGM_{n-2})x^n + \\ & \cdots\end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, üreteç fonksiyonu

$$g(x) = \frac{HGM_0 + (HGM_1 - 3HGM_0)x}{(1 - 3x + 2x^2)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h\right) + \left(\frac{-i}{2} - 4\varepsilon - 6h\right)x}{1 - 3x + 2x^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3. (Binet formülü)

$A = 2 + \frac{13}{2}i + 8\varepsilon + 6h$, $B = -1 - 3i - 2\varepsilon$ değerleri ve $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$HGM_n = A2^n + B$$

dir.

İspat

Üreteç fonksiyonu tanımı ve hibrit Gauss Mersenne sayılarının tanımından yararlanarak,

$$g(x) = \frac{HGM_0 + (HGM_1 - 3HGM_0)x}{(1 - 3x + 2x^2)}$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h\right) + \left(\frac{-i}{2} - 4\varepsilon - 6h\right)x}{1 - 3x + 2x^2}$$

$$= \frac{A}{(1 - 2x)} + \frac{B}{(1 - x)}$$

ifadesinin sağlandığını biliyoruz. Burada $A = 2 + \frac{13}{2}i + 8\varepsilon + 6h$ ve $B = -1 - 3i - 2\varepsilon$ dir. Böylece $g(x)$ yeniden yazılırsa

$$\frac{\left(1 + \frac{7}{2}i + 6\varepsilon + 6h\right) + \left(\frac{-i}{2} - 4\varepsilon - 6h\right)x}{1 - 3x + 2x^2}$$

$$= \frac{\left(2 + \frac{13}{2}i + 8\varepsilon + 6h\ \right)}{1 - 2x} + \frac{(-1 - 3i - 2\varepsilon)}{1 - x}$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A2^n\, x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} Bx^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (A2^n + B)x^n$$

dir. Buradan

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (A2^n + B)x^n$$

dir.

Yani

$$HGM_n = A2^n + B$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.1

Binet formülünü kullanarak, $n = 3$ için

$$HGM_3 = A2^3 + B$$
$$= \left(2 + \frac{13}{2}i + 8\varepsilon + 6h\right)2^3 - 1 - 3i - 2\varepsilon$$
$$= 15 + 49i + 62\varepsilon + 48h$$

sonucu elde edilir.

3.2. Özdeşlikler ve Uygulamalı Örnekleri

Teorem 3.4. (Cassini özdeşliği)

$\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$HGM_{n-1}HGM_{n+1} - HGM_n^2 = 2^nBA - 2^{n-1}AB$$

dir.

İspat

$$HGM_{n-1}HGM_{n+1} - HGM_n^2 = (A2^{n-1} + B)(A2^{n+1} + B) - (A2^n + B)(A2^n + B)$$
$$= 2^{2n}A^2 + 2^{n-1}AB + 2^{n+1}BA + B^2 - 2^{2n}A^2 - 2^nAB - 2^nBA - B^2$$
$$= 2^{n-1}AB + 2^{n+1}BA - 2^nAB - 2^nBA$$
$$= AB(2^{n-1} - 2^n) + BA(2^{n+1} - 2^n)$$
$$= 2^nBA - 2^{n-1}AB$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.2.

Cassini Özdeşliğinde $n = 3$ için

$$HGM_2HGM_4 - HGM_3^2 = 2^3BA - 2^2AB$$
$$= 2^3\left(-\frac{39}{2} - \frac{61}{2}i - 18\varepsilon + 5h\right)$$
$$-2^2\left(-\frac{39}{2} + \frac{11}{2}i - 6\varepsilon - 17h\right)$$
$$= -78 - 266i - 120\varepsilon + 108h$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.5. (Catalan özdeşliği)

$\forall\, n, r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ve $n \geq r$ için

$$HGM_{n-r}HGM_{n+r} - HGM_n^2 = 2^{n-r}(1 - 2^r)[AB - 2^rBA]$$

dir.

İspat

Binet formülü göz önünde bulundurularak

$$HGM_{n-r}HGM_{n+r} - HGM_n^2 = (A2^{n-r} + B)(A2^{n+r} + B) - (A2^n + B)(A2^n + B)$$
$$= 2^{2n}A^2 + 2^{n-r}AB + 2^{n+r}BA + B^2$$
$$-2^{2n}A^2 - 2^nAB - 2^nBA - B^2$$
$$= 2^{n-r}AB + 2^{n+r}BA - 2^nAB - 2^nBA$$
$$= AB\left(2^{n-r}(1 - 2^r)\right) + BA(2^n(2^r - 1))$$
$$= 2^{n-r}(1 - 2^r)[AB - 2^rBA]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.3.

Catalan özdeşliğinde $n = 3$ ve $r = 1$ alınırsa,

$$HGM_2HGM_4 - HGM_3^2 = 2^2(1-2)[AB - 2BA]$$
$$= -2^2AB + 2^3BA$$
$$= 2^3\left(-\frac{39}{2} - \frac{61}{2}i - 18\varepsilon + 5h\right)$$
$$-2^2\left(-\frac{39}{2} + \frac{11}{2}i - 6\varepsilon - 17h\right)$$
$$= -78 - 266i - 120\varepsilon + 108h$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.6. (Vajda özdeşliği)

$\forall\, n, r, k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$HGM_{n+r}HGM_{n+k} - HGM_nHGM_{n+r+k} = 2^n(2^r - 1)[AB - 2^kBA]$$

dir.

İspat

Binet formülü göz önünde bulundurularak

$$HGM_{n+r}HGM_{n+k} - HGM_nHGM_{n+r+k} = (A2^{n+r} + B)(A2^{n+k} + B)$$
$$-(A2^n + B)(A2^{n+r+k} + B)$$
$$= 2^{2n+r+k}A^2 + 2^{n+r}AB + 2^{n+k}BA + B^2$$
$$-2^{2n+r+k}A^2 - 2^nAB - 2^{n+r+k}BA - B^2$$
$$= 2^{n+r}AB + 2^{n+k}BA - 2^nAB - 2^{n+r+k}BA$$
$$= 2^n(2^r - 1)AB - 2^{n+k}(2^r - 1)BA$$
$$= 2^n(2^r - 1)[AB - 2^kBA]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.4 Vajda özdeşliğinde $n = 2,\ r = 1$ ve $k = 1$ için

$$\begin{aligned} HGM_3HGM_3 - HGM_2HGM_4 &= 2^2(2-1)[AB - 2BA] \\ &= 2^2AB - 2^3BA \\ &= -\left[2^3\left(-\frac{39}{2} - \frac{61}{2}i - 18\varepsilon + 5h\right)\right. \\ &\quad \left. -2^2\left(-\frac{39}{2} + \frac{11}{2}i - 6\varepsilon - 17h\right)\right] \\ &= -(-78 - 266i - 120\varepsilon + 108h) \\ &= 78 + 266i + 120\varepsilon - 108h \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.7. (D'Ocagne özdeşliği)

$\forall\, n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$HGM_mHGM_{n+1} - HGM_nHGM_{m+1} = (2^n - 2^m)[2BA - AB]$$

dir.

İspat

Binet formülü göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} HGM_mHGM_{n+1} - HGM_nHGM_{m+1} &= (A2^m + B)(A2^{n+1} + B) \\ &\quad -(A2^n + B)(A2^{m+1} + B) \\ &= 2^{n+m+1}A^2 + 2^mAB + 2^{n+1}BA \\ &\quad + B^2 \\ &\quad -2^{n+m+1}A^2 - 2^nAB - 2^{m+1}BA \\ &\quad - B^2 \\ &= 2^mAB + 2^{n+1}BA - 2^nAB \\ &\quad - 2^{m+1}BA \\ &= (2^m - 2^n)AB - (2^{n+1} - 2^{m+1})BA \\ &= (2^n - 2^m)[2BA - AB] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.5

D'Ocagne özdeşliğinde $n = 3$ ve $m = 2$ için

$$\begin{aligned} HGM_2HGM_4 - HGM_3HGM_3 &= (2^3 - 2^2)[2BA - AB] \\ &= 2^2[2BA - AB] \\ &= 2^3\left(-\frac{39}{2} - \frac{61}{2}i - 18\varepsilon + 5h\right) \\ &\quad -2^2\left(-\frac{39}{2} + \frac{11}{2}i - 6\varepsilon - 17h\right) \\ &= -78 - 266i - 120\varepsilon + 108h \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 3.8. (Honsberger özdeşliği)

$\forall\, n, m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ için

$$HGM_nHGM_m - HGM_{n+1}HGM_{m+1} = 2^{n+m}(5A^2) + 2^n(3AB) + 2^m(3BA) + 2B^2$$

dir.

İspat

Binet formülü göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned} HGM_nHGM_m - HGM_{n+1}HGM_{m+1} &= (A2^n + B)(A2^m + B) \\ &\quad +(A2^{n+1} + B)(A2^{m+1} + B) \\ &= 2^{n+m}A^2 + 2^nAB + 2^mBA + B^2 \\ &\quad +2^{n+m+2}A^2 + 2^{n+1}AB + 2^{m+1}BA + B^2 \\ &= 2^{n+m}(5A^2) + 2^n(3AB) + 2^m(3BA) + 2B^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Hibrit Gauss Mersenne sayıları için toplama formülü aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.9.

$$\sum_{k=0}^{n} HGM_k = HGM_{n+1} - (n+1)(1+3i+2\varepsilon) - (1+\frac{7}{2}i+6\varepsilon+6h)$$

şeklindedir.

İspat

Lemma 2.1 i kullanarak

$$HGM_1 = 2HGM_0 + (1+3i+2\varepsilon)$$

$$HGM_2 = 2HGM_1 + (1+3i+2\varepsilon)$$

$$HGM_3 = 2HGM_2 + (1+3i+2\varepsilon)$$

$$\vdots$$

$$HGM_{n+1} = 2HGM_n + (1+3i+2\varepsilon)$$

$$2\sum_{k=0}^{n} HGM_k = \sum_{k=1}^{n+1} HGM_k - (n+1)(1+3i+2\varepsilon)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} HGM_k - (n+1)(1+3i+2\varepsilon) - HGM_0 + HGM_{n+1}$$

dir. Yani

$$\sum_{k=0}^{n} HGM_k = HGM_{n+1} - (n+1)(1+3i+2\varepsilon) - (1+\frac{7}{2}i+6\varepsilon+6h)$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

4. HARMONİK GAUSS MERSENNE SAYILARI

Bu bölümde, harmonik Gauss Mersenne sayılarının tanımı ve bununla ilgili bazı karakteristik sonuçlar verilecektir.

Tanım 4.1.

M_k, k-inci Mersenne sayısı olmak üzere $\mathbb{GM}_n$, n-inci harmonik Gauss Mersenne sayısı

$$\mathbb{GM}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{M_k + iM_{k-1}}$$

dir.

Teorem 4.1.

$k \geq 0$ için

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{GM}_k = n\mathbb{GM}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{GM_{k+1}}$$

dir.

İspat

(1.5) den $u(k) = \mathbb{GM}_k$ ve $\Delta v(k) = 1$ için $v(k) = k$, $\Delta u(k) = \frac{1}{GM_{k+1}}$ ve

$Ev(k) = k + 1$

dir. Bu bilgiler ışığında

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{GM}_k = n\mathbb{GM}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{GM_{k+1}} \tag{4.1.1}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.

$k \geq 0$ için,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\mathbb{GM}_k)^2 = n\mathbb{GM}_n{}^2 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{GM_{k+1}} \left(2\mathbb{GM}_k + \frac{1}{GM_{k+1}}\right) \tag{4.1.2}$$

dir.

İspat

(1.5) dan $u(k) = \mathbb{GM}_k{}^2$ ve $\Delta v(k) = 1$ için $v(k) = k$,

$\Delta u(k) = \frac{1}{GM_{k+1}}\left(2\mathbb{GM}_k + \frac{1}{GM_{k+1}}\right)$ ve $Ev(k) = k + 1$ dir. Bu bilgiler ışığında

$$\sum_{k=0}^{n-1}(\mathbb{GM}_k)^2 = n\mathbb{GM}_n{}^2 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{GM_{k+1}}\left(2\mathbb{GM}_k + \frac{1}{GM_{k+1}}\right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

5. MİN MATRİSLER VE HARMONİK GAUSS MERSENNE SAYILARI

Tanım 5.1.

$\mathcal{S} = \left[\mathcal{S}_{k_{ij}}\right]_{i,j=1}^{n}$ bir n-kare matris ve $\mathcal{S}_{i,j} = \min(i,j)$, $\mathbb{GM}_n$, n-inci harmonik Gauss Mersenne sayısı olmak üzere bu matrisler

$$\mathcal{S} = \left[\mathcal{S}_{\min(i,j)}\right]_{i,j=1}^{n} = \begin{bmatrix} \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_1 & & \mathbb{GM}_1 \\ \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_2 & \mathbb{GM}_2 & \cdots & \mathbb{GM}_2 \\ \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_2 & \mathbb{GM}_3 & & \mathbb{GM}_3 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_2 & \mathbb{GM}_3 & \cdots & \mathbb{GM}_n \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & \frac{13-i}{10} & \frac{13-i}{10} & \cdots & \frac{13-i}{10} \\ 1 & \frac{13-i}{10} & \frac{206-22i}{145} & & \frac{206-22i}{145} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{13-i}{10} & \frac{206-22i}{145} & \cdots & \mathbb{GM}_n \end{bmatrix} \tag{5.1.2}$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 5.1.

$\mathbb{GM}$, (5.1.2) şeklinde bir matris olsun, o halde $\mathbb{GM}$ matrisinin Öklid normu

$$\|\mathbb{GM}\|_{\mathbb{E}} = \left[n^2(\mathbb{GM}_n)^2 - n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{GM_{k+1}}\left(2\mathbb{GM}_k + \frac{1}{GM_{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

dir.

İspat

Öklid normu tanımından

$$\|\mathbb{GM}\|_{\mathbb{E}}^2 = n\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{GM}_k^2$$

elde edilir.

Daha sonra (4.1.2) ifadesini kullanarak

$$\|\mathbb{GM}\|_{\mathbb{E}} = \left[n^2(\mathbb{GM}_n)^2 - n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k+1}{GM_{k+1}}\left(2\mathbb{GM}_k + \frac{1}{GM_{k+1}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.2.

$\mathcal{S}$, (5.1.2) deki gibi bir matris olsun. O halde

$$\det(\mathcal{S}) = \prod_{i=2}^{n}(\mathbb{GM}_i - \mathbb{GM}_{i-1})$$

dir.

İspat

(5.1.2) Matrisi üzerinde elemanter satır işlemleri kullanarak

$$\det(\mathcal{S}) = det\begin{bmatrix} \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_1 & \cdots & \mathbb{GM}_1 \\ 0 & \mathbb{GM}_2 - \mathbb{GM}_1 & \mathbb{GM}_2 - \mathbb{GM}_1 & \cdots & \mathbb{GM}_2 - \mathbb{GM}_1 \\ 0 & 0 & \mathbb{GM}_3 - \mathbb{GM}_2 & & \mathbb{GM}_3 - \mathbb{GM}_2 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{GM}_n - \mathbb{GM}_{n-1} \end{bmatrix}$$

yani

$$\det(\mathcal{S}) = \prod_{i=2}^{n}(\mathbb{GM}_i - \mathbb{GM}_{i-1})$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.

$\mathcal{S}$ matrisi ters çevrilebilirdir ve $\mathcal{S}$ matrisinin tersi

$$\mathcal{S}^{-1} = \begin{bmatrix} GM_2 + Gm_1 & -GM_2 & & & \\ -GM_2 & GM_3 + GM_2 & -GM_3 & & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & -GM_{n-1} & GM_n + GM_{n-1} & -GM_n \\ & & & & -GM_n & GM_{n+1} + GM_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İspat

Teorem 5.2 den $\mathcal{S}$ tekil olmayan matristir bundan dolayı ters çevrilebilirdir. Tümevarım metodunu kullanarak

$n = 2$ için

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{13-i}{10} \end{bmatrix}$$

dir. O halde, $\mathcal{S}$ matrisinin tersi

$$\mathcal{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 4+i & -3-i \\ -3-i & 3+i \end{bmatrix}$$

dir. Teoremin ifadesi $n = k$ için doğru yani, $\mathcal{S} = \left[\mathcal{S}_{k_{ij}}\right]_{n\times n}$ ve $\mathcal{S}^{-1} = \left[\mathcal{S}_{k_{ij}}\right]_{n\times n}^{-1}$ olsun.

buradan hareketle $b = (\mathbb{GM}_1, \mathbb{GM}_2, \dots, \mathbb{GM}_n)^T$, $b^T = (\mathbb{GM}_1, \mathbb{GM}_2, \dots, \mathbb{GM}_n)$ ve

$c = \mathbb{GM}_{n+1}$ eşitlikleri ile birlikte $n = k + 1$ için ispat tamamlanmış olur.

$\mathcal{S}^{-1}$ in ilk sütunu için tam olarak iki tane sıfır olmayan eleman içerdiğinden, permanenti daralma(contraction) yöntemi ile hesaplanabilir.

Başlangıç koşulları $b_0 = GM_2^2(GM_1 + GM_2)(GM_2 + GM_3)$ ve

$c_0 = -GM_3(GM_1 + GM_2)$ olmak üzere b_k ve c_k yineleme bağıntılarını

$$b_k = (GM_{k+2} + GM_{k+3})b_{k-1} - GM_{k+2}c_{k-1},$$

$$c_k = -GM_{k+3}b_{k-1}$$

şeklinde tanımlayalım. O halde aşağıdaki teorem sağlanır.

Teorem 5.4.

$n \geq 3$ için

$$per\mathcal{S}^{-1} = b_{n-3}[GM_n + GM_{n+1}] - c_{n-3}GM_n$$

dir.

İspat

$\mathcal{S}^{-1}$ matrisinin tanımından ilk sütun üzerine daraltılabilir(contraction metodu uygulanabilir). $\mathcal{S}^{-1}$ in k-inci daralması(contraction) $\mathcal{S}^{(k)}$ olarak adlandırılır. Şöyle ki $\mathcal{S}^{-1}$ matrisinin ilk sütununa daralma(contraction) metodu uygulanırsa

$$\mathcal{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & & & & & \\ -GM_3 & GM_4 + GM_3 & -GM_4 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & -GM_{n-1} & GM_n + GM_{n-1} & -GM_n \\ & & & & & -GM_n & GM_{n+1} + GM_n \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

Burada

$$b_0 = GM_2^2(GM_1 + GM_2)(GM_2 + GM_3)$$

ve

$$c_0 = -GM_3(GM_1 + GM_2)$$

dir.

$\mathcal{S}^{(1)}$ in ilk sütununa göre daralma(contraction) yöntemi uygularsak

$$\mathcal{S}^{(2)} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ -GM_4 & GM_5 + GM_4 & -GM_5 & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & -GM_{n-1} & GM_n + GM_{n-1} & -GM_n \\ & & & & & -GM_n & GM_{n+1} + GM_n \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$b_1 = (GM_3 + GM_4)b - (GM_3)c$$

ve

$$c_1 = -GM_4 b$$

dir.

$1 \leq k \leq n-3$ için

$$\mathcal{S}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} b_k & c_k & & & & & \\ -GM_{k+2} & GM_{k+2}+GM_{k+3} & -GM_{k+3} & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & -GM_{n-1} & GM_n+GM_{n-1} & -GM_n \\ & & & & & -GM_n & GM_{n+1}+GM_n \end{bmatrix}$$

dir. Burada

$$b_k = (GM_{k+2} + GM_{k+3})b_{k-1} - (GM_{k+2})c_{k-1}$$

ve

$$c_k = -GM_{k+3}b_{k-1}$$

dir.

$k \geq 1$ için $(n-3)$-inci adım

$$\mathcal{S}^{(n-3)} = \begin{bmatrix} b_{n-4} & c_{n-4} & 0 \\ -GM_{n-1} & GM_n + GM_{n-1} & -GM_n \\ 0 & -GM_n & GM_{n+1} + GM_n \end{bmatrix}$$

dir.

$(n-2)$-inci adım

$$\mathcal{S}^{(n-2)} = \begin{bmatrix} b_{n-3} & c_{n-3} \\ -GM_n & GM_{n+1} + GM_n \end{bmatrix}$$

dir.

O halde

$$per\mathcal{S}^{-1} = per\mathcal{S}^{(n-2)} = b_{n-3}[GM_n + GM_{n+1}] - c_{n-3}GM_n$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5.1. $n = 6$ için permanentini ilk sütuna göre daralma(contraction) yöntemi ile hesaplayalım.

$$\mathcal{S}_6^{-1} = \begin{bmatrix} 4+i & -3-i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3-i & 10+4i & -7-3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7-3i & 22+10i & -15-7i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15-7i & 46+22i & -31-15i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -31-15i & 94+46i & -63-31i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -63-31i & 190+94i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_6^{(1)} = \begin{bmatrix} 42+32i & -25-19i & 0 & 0 & 0 \\ -7-3i & 22+10i & -15-7i & 0 & 0 \\ 0 & -15-7i & 46+22i & -31-15i & 0 \\ 0 & 0 & -31-15i & 94+46i & -63-31i \\ 0 & 0 & 0 & -63-31i & 190+94i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_6^{(2)} = \begin{bmatrix} 766+1352i & -436-788i & 0 & 0 \\ -15-7i & 46+22i & -31-15i & 0 \\ 0 & -31-15i & 94+46i & -63-31i \\ 0 & 0 & -63-31i & 190+94i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_6^{(3)} = \begin{bmatrix} 6516+93916i & -3466-53402i & 0 \\ -31-15i & 94+46i & -63-31i \\ 0 & -63-31i & 190+94i \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_6^{(4)} = \begin{bmatrix} -4401216+10835292i & 2500888-6118704i \\ -63-31i & 190+94i \end{bmatrix}$$

sonuç olarak

$$\begin{aligned} per\mathcal{S}_6^{-1} &= per\mathcal{S}_6^{(4)} \\ &= b_3[GM_n + GM_7] - c_3 GM_6 \\ &= -2201984256 + 1952942000i \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

6. SONUÇ

Bu tezde, Gauss Mersenne katsayılarına sahip hibrit sayılar elde edildi. Gauss Mersenne katsayılı hibrit sayılar için üreteç fonksiyonu, bu üreteç fonksiyonundan yararlanarak Binet formülü verildi. Ayrıca sırasıyla Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği, Vajda özdeşliği, D'Ocagne özdeşliği ve Honsberger özdeşlikleri Binet formülü kullanılarak ispatlandı. Elde edilen sonuçlar uygulamalı örneklerle açıklandı. Son olarak harmonik Gauss Mersenne sayılarının tanımı, bazı karakteristik eşitlikler, elemanları harmonik Gauss Mersenne sayıları olan min matris tanımı ve permanent hesabı verildi.

KAYNAKLAR

Arthur T. Benjamin, Gregory O. Preston, Jennifer J. Quinn, (2002). A Stirling Encounter with Harmonic Numbers, Mathematics Magazine. 75 (2): 95–103, DOI:10.1080/0025570X.2002.11953110

Arslan, H. (2021). Gaussian Pell and Gaussian Pell-Lucas Quaternions, Filomat, 35:5, 1609–1617,https://doi.org/10.2298/FIL2105609A

Alp, Y., Koçer, E.G. (2021). Hibrit Leonardo numbers, Science Direct, DOI:10.1016/j.chaos.2021.111128.

Catalan, Eugène-Charles (December 1886). Sur la série de Lamé. Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège, Deuxième Série. 13: 319–321.

C.J. Harman (1981). Complex Fibonacci numbers, The Fibonacci Quarterly 19, 82-86.

Graham, R, Knuth, D, Patashnik,K., (1989). Concrete Mathematics. Addison-Wesley, Reading

Humbert, P. (1939) Maurice d'Ocagne (1862-1938), Ciel et Terre, Vol. 55, p. 108, [http://adsabs.harvard.edu/full/1939C%26T....55..108H]

Horadam, A.F. (1965) Generating Functions for Powers of A Certain Generalised Sequence of Numbers. Duke Math. J. 68 , 437-446. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-65-03244-8

Honsberger, R. (1985). A second look at the Fibonacci and lucas numbers, in Mathematical Gems III,Mathematical Association of America, Washington.

İşbilir, Z., Gürses, N. (2021). Pentanacci ve Pentanacci-Lucas hybrid numbers, Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, DOI:10.1080/09720529.2021.1936899.

Kocer, E.G., Alsan, H. (2021). Generalized Hybrid Fibonacci and Lucas p-numbers, Indian Journal of pure and Applied Mathematics, DOI:10.1007/s13226-021-00201-w.

Kızılates, C. (2020). A new generalization of Fibonacci hybrid and Lucas hybrid numbers, Chaos, Solitons and Fractals, 130.

Koshy, T., Gao, Z. (2013). Catalan numbers with Mersenne subscripts. Mathematical Scientist, 38, 86–91.

Koshy, T. (2001). Fibonacci and Fibonacci Lucas Numbers with Applications. John Wiley and Sons Inc., NY., http://dx.doi.org/10.1002/9781118033067

M. Bahsi, S. Solak, (2010). On the matrices with Harmonic numbers, GU. J. Sc, 23(4), 445-448.

M. Bahsi, (2016). On the norms of r-circulant matrices with the hyper Harmonic numbers, Journal of mathematical inequalities, 10(2), 445-458.

N. Tuglu, C. Kizilates, S. Kesim, (2015). On the harmonic and hyperharmonic Fibonacci numbers, Advances in Difference Equations, 1-12.

Özdemir, M. (2018). Introductıon to hybrid numbers. Adv. Appl. Clifford Algebras, 28:11.

Özkan, E., Uysal, M. (2021). Mersenne-Lucas Hybrid Numbers, Mathematica Montisnigri 52:17-29, DOI: 10.20948/mathmontis-2021-52-2.

Pethe, S., Horadam, A.F. (1986). Generalized Gaussian Fibonacci Numbers, Bull. Austral. Math. Soc. 33, 37-–48. https://doi.org/10.1017/S0004972700002847

Petroudi, S. H. J., Pirouz, M., Akbıyık, M., Yılmaz, F.,(2022). Some Special Matrices with Harmonic Numbers. Konuralp Journal of Mathematics, 10(1), 188-196.

R.A. Brualdi, P.M. Gibson, (1977). Convex polyhedra of doubly stochastic matrices I: applications of the permanent function, J. Combin. Theory A 22, 194-230.

Srivastava H. M., Manocha, H. L. (1984). A Treatise on Generating Functions, Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York.

S.H.J. Petroudi, B. Pirouz, (2015). A particular matrix, its inversion and some norms, Appl. and Computational Math. 4(2), 47-52.

Szynal-Liana, A. (2018). The Horadam hybrid numbers, Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, 38.

Szynal-Liana, A., Włoch, I. (2020). On generalized Mersenne hybrid numbers, Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, sectio A - Mathematica, Vol 74, No 1.

Soykan, Y., Taşdemir, E. (2021). Generalized Tetranacci Hybrid Numbers, Annales Mathematicae Silesianae,35(113-130), DOI:10.2478/amsil-2020-0021.

Taşcı, D. (2021). On Gaussian Mersenne numbers, Science and Art ,21,s1021-1028, DOI:10.46939/j.sci.arts-21.4-a13.

Taşcı, D., Sevgi, E. (2021). Some Properties between Mersenne, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers, 146, 110862.

Tuenter, Hans J. H. (2022). "Fibonacci Summation Identities arising from Catalan's Identity". The Fibonacci Quarterly. **60** (4): 312–319. MR 4539699. Zbl 1512.11025

Vajda S. (1989) Fibonacci and Lucas numbers and the golden section: theory and applications. Halsted Press

Yamaç Akbiyik, S., Akbiyik, M., Yilmaz, F., (2021). One Type of symmetric matrix with harmonic Pell entries, its inversion, permanents and some norms. Mathematics, 9(5), 539.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : YILDIRIM, Serhat

Uyruğu : T.C.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Yüksek lisans	Ankara Hacı Bayram Veli Ünivesitesi	2024
Lisans	Gazi Üniversitesi	2020
Lise	Karabük Demir Çelik Anadolu Lisesi	2015

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2020-2021	Mesleki Eğitim Merkezi Polatlı	Ücretli Öğretmen
2021-2022	Atatürk Anadolu Lisesi Polatlı	Ücretli Öğretmen

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Yayınlar

Yıldırım, S., Yılmaz, F. (2023). On Hybrid numbers with Gaussian Mersenne Coefficients, Erzincan University journal of Science and Technology, DOI:10.18185/erzifbed.1162515

Uluslararası Bildiriler

1. 3rd International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE-2022), Katılımcı, Bükreş, Romanya, 2022.
2. 4rd International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering (ICMASE-2023), Dinleyici, Madrid, İspanya, 2023.

Ulusal Bildiriler

1. 15. Ankara Matematik Günleri, Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, (AMG-2024) Dinleyici Yenimahalle/Ankara,2024

Hobiler

Film izlemek, resim çizmek, balık tutmak, yemek yapma


ankara
HBM